Tome 21 Supplément au N° 3 Mars 1960

LE JOURNAL DE PHYSIQUE
ET
LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

LES LENTILLES MAGNÉTIQUES QUADRUPOLAIRES SANS FER :

Réalisation de répartitions d'induction à gradient constant

Par Albert SEPTIER,
Laboratoire d'Électronique et Radioélectricité de la Faculté des Sciences de Paris (*).

Résumé. — Après un rappel des propriétés générales des champs dans un système à symétrie quadrupolaire, l'auteur établit les expressions de l'induction magnétique et de son gradient radial dans le cas de quatre nappes de courants ou de quatre bobines épaisses sans fer. Un choix convenable des dimensions transversales des bobines permet d'obtenir dans toute la zone utile entourant l'axe du système un gradient constant à mieux que 10^{-2} près.
Des lentilles quadrupolaires sans fer seraient donc, à ce point de vue, nettement supérieures aux lentilles quadrupolaires classiques.

Abstract. — After recalling the general properties of the fields in a system with quadrupolar symmetry, the author gives the expressions of the magnetic field and its radial gradient, in a system consisting of four sheets of currents, or four thick coils without iron. By properly choosing the transversal dimensions of the coils, it is possible to obtain for the gradient, in the whole space around the axis, a flatness which is better than 10^{-2}.
From this point of view, strong focusing lenses without iron are better than quadrupolar lenses of classical design.

1. **Introduction.** — L'obtention de champs magnétiques homogènes ou inhomogènes dont l'intensité dépasse quelques dizaines de milliers d'Oersted n'est possible qu'avec des électro-aimants spéciaux consommant des puissances électriques considérables, ou bien avec des bobines sans fer, pour lesquelles le phénomène de saturation d'un matériau ferromagnétique ne joue pas. De nombreuses publications ont décrit la réalisation de champs très intenses à l'aide de solénoïdes ; un synchrotron à protons sans fer est en voie de réalisation, donnant l'exemple de champs inhomogènes intenses dans un volume considérable. L'emploi de bobines sans fer permet en outre une alimentation en impulsions de courant courtes (par suite de la self induction réduite des circuits), mettant en jeu des courants de plusieurs milliers d'Ampères, avec une puissance moyenne réduite.

On peut songer à étendre ces avantages aux lentilles à focalisation forte. Dans une lentille quadrupolaire classique l'induction ne peut que difficilement dépasser 10 000 Gauss sur le sommet des pôles, par suite de la saturation rapide des supports de pièces polaires. D'autre part, un grand nombre d'accélérateurs de très haute énergie fonctionnent en impulsions, ce qui permet d'envisager une alimentation pulsée des lentilles focalisantes.

D'autre part, vers les très faibles énergies, l'influence du champ rémanent n'est plus négligeable, et perturbe les résultats, en créant un effet d'hystérésis. Il semble donc utile d'envisager la possibilité de réaliser des lentilles à convergence forte sans fer, c'est-à-dire de manière aussi approchée que possible, des répartitions d'induction magnétique à gradient radial constant autour d'un axe Oz et dans un cylindre utile de rayon R_0.

Rappelons que, dans une lentille à fer classique, par suite dela largeur finie des pôles, on n'obtient

(*) 33, avenue du Général-Leclerc, Fontenay-aux-Roses, Seine.

jamais de gradient radial parfaitement constant : sur le cercle de gorge de rayon a, sa décroissance peut atteindre 5 à 10 % pour des pôles larges, 20 à 30 % pour les pôles étroits utilisés aux champs forts [1].

Les répartitions de champs obtenues dans la suite devront donc être comparées avec celles des lentilles réelles, et non avec la répartition idéale qu'on ne peut pas réaliser en pratique.

Nous n'envisagerons ici que les champs créés par des systèmes de conducteurs à densité de courant uniforme afin de simplifier les problèmes d'alimentation. Après avoir rappelé les expressions du potentiel et des champs dans les systèmes à symétrie quadrupolaire, nous étudierons les approximations de plus en plus approchées obtenues dans un espace de plus en plus grand entourant l'axe, à l'aide de 4 fils, puis de 4 nappes de courant et enfin de 4 bobines épaisses de section rectangulaire, les conducteurs étant supposés indéfinis suivant un axe Oz, ce qui conduit à des répartitions d'induction à deux dimensions seulement.

II. Expressions générales du potentiel et des champs dans un système à symétrie quadrupolaire.

2-1. Le potentiel scalaire. — Considérons un système de quatre électrodes équipotentielles indéfinies parallèles à un axe Oz, portées respectivement aux potentiels (électriques ou magné-

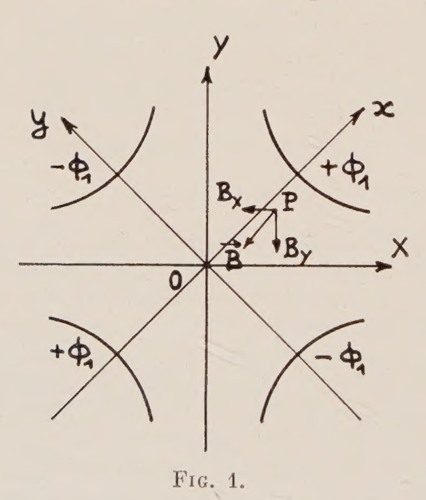


Fig. 1.

tiques) $+\Phi_1$ et $-\Phi_1$ (voir *fig.* 1), et possédant : quatre plans de symétrie mécanique zOX, zOY, zOx et zOy ; deux plans de symétrie d'excitation : zOx et zOy.

Potentiel et champ ne dépendent que de 2 coordonnées. Le potentiel scalaire $\Phi(X,Y)$ obéit à l'équation de Laplace :

$$\Delta^2\Phi = 0 \qquad (1)$$

et, si on pose

$$W(s) = U(X, Y) + i\Phi(X, Y) \qquad (2)$$

$$\text{avec } s = X + iY$$

on peut l'exprimer sous la forme d'une série infinie :

$$W(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(h_n + ik_n)\, s^n. \qquad (3)$$

Par suite des différentes symétries en X et en Y, l'expression $W(s)$ a la forme

$$W(s) = \frac{1}{2} h_2 s^2 + \frac{1}{6} h_6 s^6 + \frac{1}{10} h_{10} s^{10} + \dots \qquad (4)$$

d'où l'expression du potentiel

$$\Phi(X, Y) = \mathcal{I}m\, W(s)$$

$$\Phi(X, Y) = h_2 XY + h_6 XY\left(X^4 - \frac{10}{3} X^2 Y^2 + Y^4\right)$$
$$+ h_{10} XY\Big[X^8 - 12X^6 Y^2 + \frac{252}{10} X^4 Y^4 - 12X^2 Y^6 + Y^8\Big] + \dots \qquad (5)$$

Dans le système d'axes (Ox, Oy) à 45° des précédents, on aurait de même

$$\Phi(x, y) = \mathcal{R}e\, W(s)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{h_2}{2}(x^2 - y^2) + \frac{h_6}{6}[x^6 - 15x^2 y^2(x^2 - y^2) - y^6] + \dots \qquad (6)$$

2-2. Les champs en coordonnées rectangulaires. — On peut alors calculer les composantes des champs

$$B_X = -\frac{\partial\Phi}{\partial X}, \qquad B_Y = -\frac{\partial\Phi}{\partial Y}.$$

On obtient par exemple en se limitant aux termes du 9e degré :

$$B_X = -[h_2 Y + h_6(5X^4 Y - 10X^2 Y^3 + Y^5) + h_{10}(9X^8 Y - 84X^6 Y^2 + 126X^4 Y^5 - 36X^2 Y^7 + Y^9)].$$

Sur OX, on a alors

$$\begin{cases} B_X = 0 \\ B_Y = -h_2 X\left[1 + \dfrac{h_6}{h_2} X^4 + \dfrac{h_{10}}{h_2} X^8 + \dots\right] \end{cases} \qquad (8)$$

et sur Ox

$$B_X = B_Y = -h_2 X\left(1 - \frac{h_6}{h_2}.4X^4 + \frac{h_{10}}{h_2}.16X^8 - \dots\right)$$

$$B_x = -h_2 x\left(1 - \frac{h_6}{h_2} x^4 + \frac{h_{10}}{h_2} x^8 - \dots\right). \qquad (9)$$

Les composantes intéressantes du gradient radial du champ dont donc :
sur OX :

$$K_X = \frac{\partial B_Y}{\partial X} = -h_2\left(1 + 5\frac{h_6}{h_2}X^4 + 9\frac{h_{10}}{h_2}X^8 + \ldots\right)$$

sur Ox

$$K_x = \frac{\partial B_x}{\partial x} = -h_2\left(1 - 5\frac{h_6}{h_2}x^4 + 9\frac{h_{10}}{h_2}x^8 - \ldots\right). \quad (10)$$

Dans le cas particulier où les sections des électrodes par le plan XOY matérialisent les lignes équipotentielles d'équation

$$\Phi_1 = KXY$$

on obtient une répartition de champ à gradient radial constant que nous appellerons « répartition idéale ».

$$B_Y = -h_2 X \text{ sur OX} \quad \text{et} \quad B_x = -h_2 x \text{ sur Ox}$$

soit, en exprimant h_2 à partir de la différence de potentiel $2\Phi_1$ existant entre 2 électrodes adjacentes et du rayon a du cercle de gorge tangent aux électrodes

$$B_Y = -\frac{2\Phi_1}{a^2}X \quad \text{et} \quad B_x = -\frac{2\Phi_1}{a^2}x. \quad (11)$$

Le gradient est alors :

$$K_X = K_x = K = -\frac{2\Phi_1}{a^2}.$$

A partir de ces mêmes grandeurs, on aurait dans le cas général, d'après (8) et (9)

$$B_Y = -\frac{2\Phi_1}{a^2}X[1 + K_6X^4 + K_{10}X^8 + \ldots] \quad (12)$$

$$B_x = -\frac{2\Phi_1}{a^2}x[1 - K_6x^4 + K_{10}x^8 - \ldots].$$

Avec la correspondance :

$$h_2 = \frac{2\Phi_1}{a^2} \qquad K_6 = \frac{h_6}{h_2} \qquad K_{10} = \frac{h_{10}}{h_2} \ldots$$

D'après ces expressions, on voit qu'il est possible de connaître les composantes des champs dans tout l'espace utile (intérieur au cercle de gorge) lorsque les coefficients h_2, h_6, h_{10}, etc... seront déterminés, et qu'il suffit, pour cette détermination, d'obtenir un développement du type (8) ou (9) dans l'un des plans de symétrie du système envisagé.

2-3. Expressions en coordonnées polaires. — On peut également adopter une autre représentation du potentiel, en coordonnées polaires. L'expression (3) conduit alors à

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}h_n r^n \sin n\theta \quad (13)$$

si on prend l'origine de θ sur OX.

Par suite des différentes symétries

$$\Phi(r, \theta) = \frac{h_2}{2}r^2 \sin 2\theta + \frac{h_6}{6}r^6 \sin 6\theta + \frac{h_{10}}{10}r^{10}\sin 10\theta + \ldots \quad (14)$$

et

$$\begin{cases} B_r = -h_2 r\left[\sin 2\theta + \frac{h_6}{h_2}r^4 \sin 6\theta + \ldots\right]. \\ B_\theta = -h_2 r\left[\cos 2\theta + \frac{h_6}{h_2}r^4 \cos 6\theta + \ldots\right]. \end{cases} \quad (15)$$

Les coefficients h_2 et h_6 sont identiques à ceux de (4), et (15) est équivalente à (8) et (9). Cette représentation a conduit à la mise au point d'une méthode expérimentale de détermination très précise des différents coefficients h_n à l'aide de bobines associées à un fluxmètre sensible [2].

III. Induction produite par quatre fils disposés en carré.

3-1. Induction. — Considérons quatre fils parallèles à Oz, situés sur OX et OY à une distance b de O (*fig.* 2), et parcourus par des courants de sens

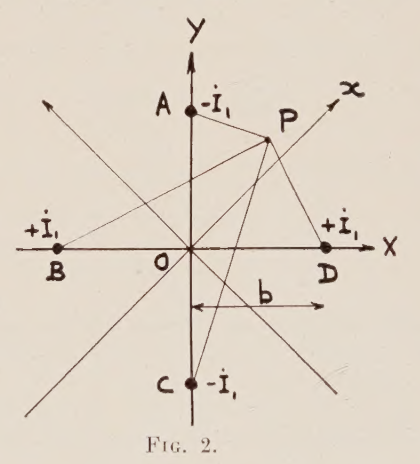


Fig. 2.

opposés : $-I_1$ en A et C, $+I_1$ en B et D, de façon à obtenir des répartitions d'induction semblables à celles de la figure 1. L'induction B en P (X, Y) est donnée par :

$$B_X = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left[\frac{Y}{Y^2 + (X+b)^2} + \frac{Y}{Y^2 + (X-b)^2} - \frac{Y+b}{X^2 + (Y+b)^2} - \frac{Y-b}{X^2 + (Y-b)^2}\right] \quad (16)$$

et une expression identique pour B_Y, en échangeant Y et X. Dans les plans de symétrie, les expressions sont très simples :
sur OX

$$\begin{cases} B_X = 0 & (17a) \\ B_Y = -\frac{2\mu_0 I_1}{\pi b^2}X\left[1 - \left(\frac{X}{b}\right)^4\right]^{-1} \end{cases}$$

soit

$$B_Y = -\frac{2\mu_0 I_1}{\pi b^2} X\left(1 + \left(\frac{X}{b}\right)^4 + \left(\frac{X}{b}\right)^8 + \dots\right) \qquad (17b)$$

au voisinage de O, et la même loi que pour B_X sur OY, où B_Y est nul.

Dans les plans Ox et Oy, on a $B_X = B_Y$; le vecteur $\boldsymbol{B}$ est dirigé radialement et on a :

$$B_x = -\frac{2\mu_0 I_1}{\pi b^2} x\left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^4\right]^{-1} \qquad (18a)$$

soit

$$B_x = -\frac{2\mu_0 I_1}{\pi b^2} x\left(1 - \left(\frac{x}{b}\right)^4 + \left(\frac{x}{b}\right)^8 - \dots\right) \qquad (18b)$$

près de O.

L'induction B, nulle sur l'axe Oz, ne variera linéairement avec la distance à l'axe que dans une zone peu étendue X, $x \ll b$. Si r désigne la distance OP, la valeur de B oscillera de $\pm$ 2,5 % autour de la valeur idéale :

$$B_i = -\frac{2\mu_0 I_1}{\pi b^2} r$$

lorsqu'on se déplacera sur un cercle de rayon $r_1 = b/5$, et de $\pm$ 6,25 % pour $r_2 = b/4$.

3-2. Gradient radial. — Sur l'axe, on aurait :

$$K(0) = -\frac{2\mu_0 I_1}{\pi b^2} \qquad (19)$$

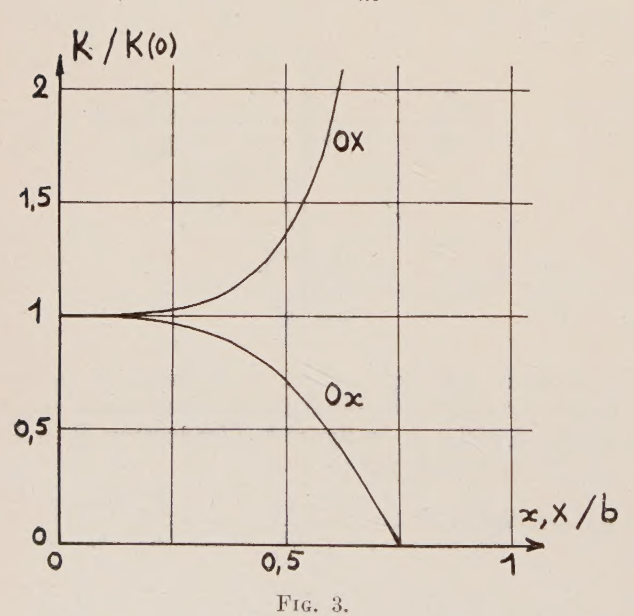


Fig. 3.

et, en posant $u = X/b$ et $v = x/b$, on obtient sur OX et Ox respectivement :

$$K(X) = K(0)\frac{1 + 3u^4}{(1 - u^4)^2} \qquad (20a)$$

$$K(x) = K(0)\frac{1 - 3v^4}{(1 + v^4)^2}$$

ce qui conduit à des développements de la forme :

$$K(X) = K(0)\,[1 + 5u^4 + 9u^8 + \dots]$$

où (20b)

$$K(x) = K(0)\,[1 - 5v^4 + 9v^8 - \dots]$$

conformément aux prévisions du § 2.

Une lentille quadrupolaire formée de quatre fils ne pourrait donc être utilisée que comme système correcteur pour un faisceau circulant au voisinage de Oz ($r/b \leqslant 0{,}2$), car le gradient varie très vite lorsqu'on s'en éloigne (*fig.* 3) : $K/K(0)$ croît sur OX et décroît sur Ox ; ce rapport atteint 2 en $u \simeq 0{,}55$ et s'annule pour $v \simeq 0{,}75$. Une lentille de ce type est utilisée sur le trajet d'injection du faisceau de protons de 3,6 MeV du Cosmotron de Brookhaven [3].

IV. Induction produite par quatre nappes de courant disposées en carré et de largeur égale au côté du carré.

4-1. Induction. — La figure 4 montre la disposition des quatre nappes, d'épaisseur e négligeable

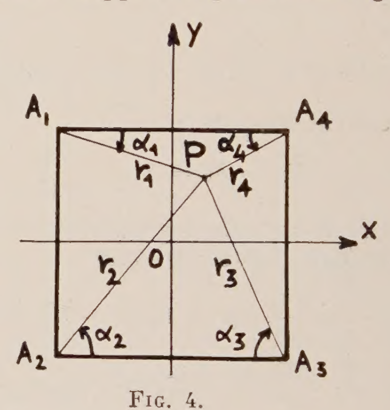


Fig. 4.

devant b. Si j désigne la densité de courant dans le conducteur, on aurait, pour l'intensité totale : $I_2 = 2bej$. On suppose que les courants sont égaux à :

$+ I_2$ dans $\overline{A_1A_2}$ et $\overline{A_3A_4}$

$- I_2$ dans $\overline{A_1A_4}$ et $\overline{A_2A_3}$.

Il nous suffit de calculer B_X et B_Y sur les axes de symétrie, OX et Ox par exemple.

En posant $X/b = u$ et $x/b = v$, on aurait (voir Appendice II) :

Sur OX

$$\begin{cases} B_X = 0 \\ B_Y = -\dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi b}\left[\operatorname{Arg\,th}\dfrac{2u}{2 + u^2} + \operatorname{Arc\,tg}\dfrac{2u}{2 - u^2}\right] \end{cases} \qquad (21a)$$

et sur Ox

$$B_X = B_Y = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi b}\,[\operatorname{Arg\,th} u + \operatorname{Arc\,tg} u] \qquad (21b)$$

d'où, au voisinage de l'axe

$$B_Y = -\frac{\mu_0 I_2}{\pi b} u \left[1 - \frac{1}{20} u^4 + \frac{1}{144} u^8 - \dots\right] \quad (22a)$$

$$B_x = -\frac{\mu_0 I_2}{\pi b} v \left[1 + \frac{1}{20} v^4 + \frac{1}{144} v^8 + \dots\right] \quad (22b)$$

Les coefficients K_6 et K_{10} seraient respectivement égaux à $1/20$ et $1/144$.

Les courbes de la figure 5 donnent les variations du rapport B/B_{th} obtenues à partir des formules

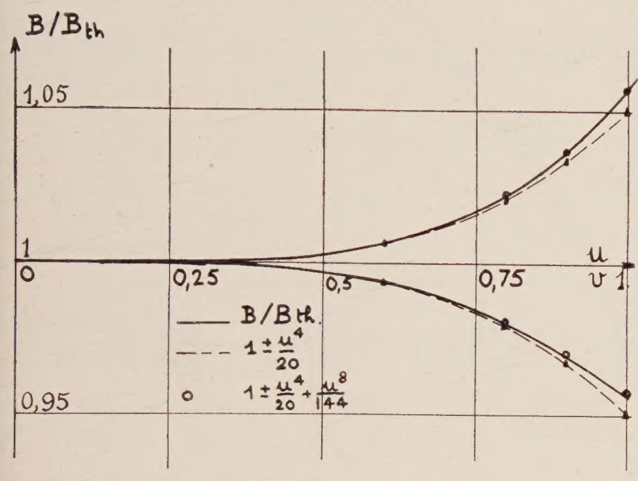


Fig. 5.

générales (21), de $r/b = 0$ à $r/b = 1$; B_{th} désigne la valeur idéale

$$B_{th} = -\frac{\mu_0 I_2}{\pi b} \cdot \frac{r}{b} = K(0) . r.$$

On y a également porté les courbes obtenues avec les développements limités : on voit que 3 termes suffisent pour représenter les variations réelles à 10^{-3} près.

La valeur de l'induction augmente suivant Ox, et décroît sur OX, contrairement au phénomène observé dans le cas des quatre fils : on peut chercher à compenser en partie ces variations en superposant les deux systèmes de courants.

4-2. Gradient radial. — On tire des expressions (21) :

$$K(X) = K(0)\left(1 + \frac{u^4}{4}\right)^{-1}$$

et

$$K(x) = K(0)\left(1 - \frac{v^4}{4}\right)^{-1} \quad (23)$$

avec

$$K(0) = -\frac{\mu_0 I_2}{\pi b^2} = -\frac{2\mu_0 j}{\pi}\frac{e}{b}. \quad (24)$$

Les fonctions $K(X)/K(0)$ et $K(x)/K(0)$, qui constituent le « gradient réduit », sont représentées sur la figure 6, en utilisant les formules (23) et les développements à trois termes du type :

$$K(X) = K(0)\left[1 - \frac{1}{5} u^4 + \frac{1}{16} u^4 - \dots\right].$$

Cette approximation est encore suffisante.

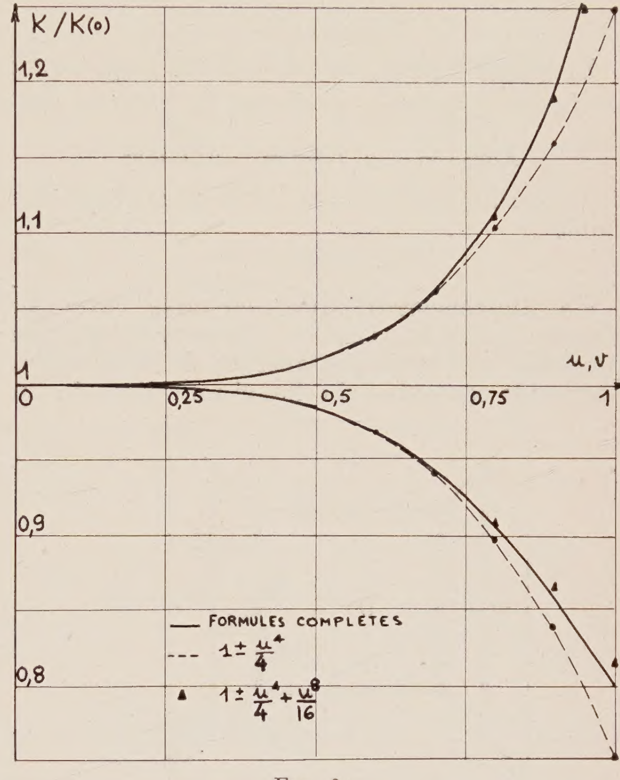


Fig. 6.

Jusqu'en $u = v = 0{,}70$, le gradient réel ne diffère pas de plus de $\pm$ 6 % du gradient $K(0)$ et pour $u = v = 1$, les écarts sont respectivement sur OX et Ox de — 25 et + 33 %, ce qui se traduit pour B par des écarts de $\pm$ 6 % entre B réel et B idéal.

4-3. Comparaison avec la lentille quadrupolaire classique de même excitation. — Le

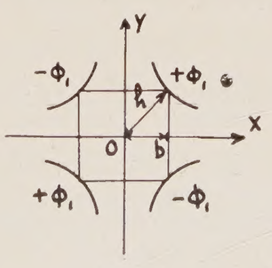


Fig. 7.

gradient $K(0)$ sur Oz est donné par (24) ; la répartition spatiale de l'induction est la même que celle

d'une lentille quadrupolaire classique dont les pôles auraient leurs sommets aux quatre coins du carré (*fig.* 7), et telle que la différence de potentiel magnétique entre deux pôles adjacents soit précisément

$$2\Phi_1 = \mu_0 \dot{I}_2$$

soit, pour chaque pôle :

$$\Phi_1 = \mu_0 I_2/2.$$

La lentille à pôles, dont le cercle de gorge aurait un rayon $h = b\sqrt{2}$, produirait un gradient égal à :

$$K(0)_{\text{fer}} = -\mu_0 I_2/h^2 = -\mu_0 I_2/2b^2.$$

La lentille sans fer fournit donc un gradient plus faible :

$$K(0)_{\text{fer}}/K(0)_{\text{air}} = \pi/2. \quad (25)$$

4-4. Superposition de couches minces : bobines trapézoidales. — On peut obtenir des gradients élevés en juxtaposant de nombreuses nappes de courants : si celles-ci sont disposées en

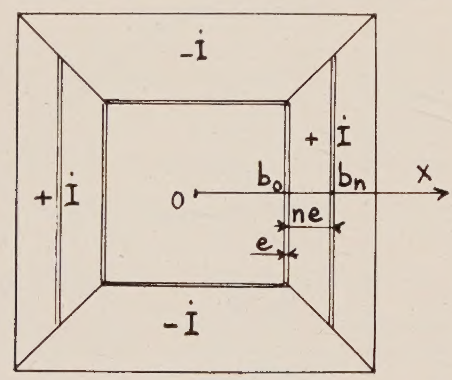


Fig. 8.

carré il y a superposition linéaire des distributions précédentes (*fig.* 8).

Soit e l'épaisseur d'une couche (avec $e \ll b$), et j la densité de courant. Le gradient au centre, fourni par la n ième couche est donné par :

$$K(0)_n = -\frac{2\mu_0 j}{\pi}\frac{e}{b_n} = -\frac{2\mu_0 j}{\pi}\frac{e}{b_0[1 + (ne/b_0)]}$$

$$K(0)_n = K(0)_0/(1 + ns) \text{ en posant } s = e/b_0. \quad (26)$$

D'où le gradient total au centre

$$\frac{K(0)_{\text{total}}}{K(0)_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + ns}. \quad (27)$$

On pourrait aussi obtenir $K(0)$ total en calculant tout d'abord l'induction créée par une bobine trapézoïdale par la méthode employée pour les bobines rectangulaires (voir Appendice I), mais les formules résultantes sont trop peu maniables.

La courbe correspondante est représentée figure 9 pour $s = 0{,}05$ (courbe (1)) jusqu'à $n = 19$ (soit 20 couches, correspondant à des bobines d'épais-

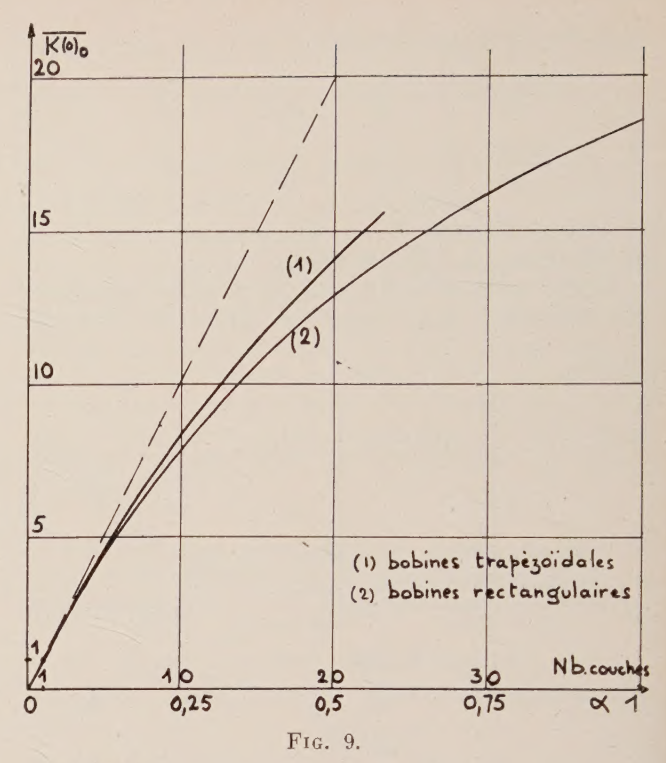


Fig. 9.

Fig. 10.

seur b). Lorsque le gradient s'accroît, ses variations dans l'espace utile diminuent. On a en effet sur OX :

$$K(X)_n = \frac{K(0)_0}{(1 + ns)\left(1 + \dfrac{u^4}{4}\dfrac{1}{(1 + ns)^4}\right)} \quad (28)$$

et

$$K(X)_{\text{total}} = \sum_0^n K(X)_n.$$

Le rapport $K(X)_{\text{total}}/K(0)_{\text{total}}$ est porté sur la figure 10 pour différentes valeurs de l'épaisseur des

bobines : $2a = ne$. Les courbes sont désignées par les valeurs de $\alpha = a/b_0$, pour $\alpha = 0$, 0,25 et 0,5. Dans ce dernier cas (bobines de 20 couches), le gradient total au centre est égal à

$$K(0)_{\text{total}} = 14{,}11\ K(0)_0$$

et les variations de $K(X)$ sont au maximum de 8 % en $X = b$, au lieu de 20 % avec une couche unique : l'accroissement du gradient s'accompagne d'une linéarité accrue des variations de l'induction (les écarts $\Delta B/B_{\text{th}}$ ne dépassent pas 1,6 % en $X = b$).

V. Induction créée par quatre nappes minces de largeur $2l$ inférieure à $2b$.

5-1. Induction sur OX. — Avec la disposition

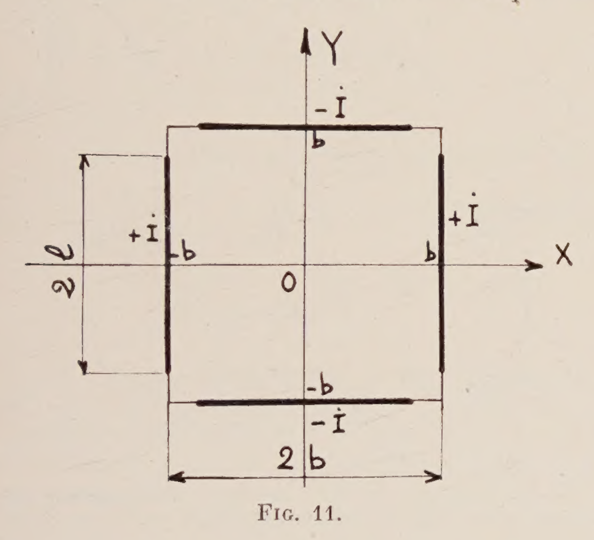


Fig. 11.

de la figure 11, et des courants $\pm I$ dans les nappes, l'induction sur OX est donnée par

$$B_Y = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{2\pi\, l}\left[\text{Arg th}\,\frac{2lX}{d^2 + X^2} + \text{Arc tg}\,\frac{2lX}{d^2 - X^2}\right] \qquad (29)$$

avec

$$d^2 = b^2 + l^2.$$

Si on pose $l/b = t$ et $X/b = u$, on obtient, avec $j = I/2l$

$$B_Y = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{2\pi\, l}\left[\text{Arg th}\,\frac{2ut}{(1+t^2)\left(1+\dfrac{u^2}{1+t^2}\right)} + \text{Arc tg}\,\frac{2ut}{(1+t^2)\left(1-\dfrac{u^2}{1+t^2}\right)}\right] \qquad (30)$$

et on peut en calculer les valeurs pour chaque valeur de u lorsque t est fixé.

Au voisinage de O, on aurait

$$B_Y = -\frac{2\mu_0 \dot{I}}{\pi b(1+t^2)}\cdot u\left[1 - \frac{10t^2 - t^4 - 5}{5(1+t^2)^4}\,u^4 + \frac{9 - 84t^2 + 126t^4 - 36t^6 + t^8}{9(1+t^2)^8}\,u^8\right]. \qquad (31)$$

5-2. Gradient : choix de la valeur optimum de l. — Le gradient $K(X)$ sur OX s'exprime par

$$K(X) = -\frac{2\mu_0 \dot{I}}{\pi b^2(1+t^2)}\cdot\frac{1 + \dfrac{3-t^2}{(1+t^2)^3}\,u^4}{1 + \dfrac{2(6t^2 - t^4 - 1)\,u^4 + u^8}{(1+t^2)^4}} \qquad (32)$$

On a donc :

$$K(0) = -\frac{2\mu_0 \dot{I}}{\pi b^2(1+t^2)}. \qquad (33)$$

Les courbes représentant les variations de $K(X)/K(0)$ sur OX pour différentes valeurs de t

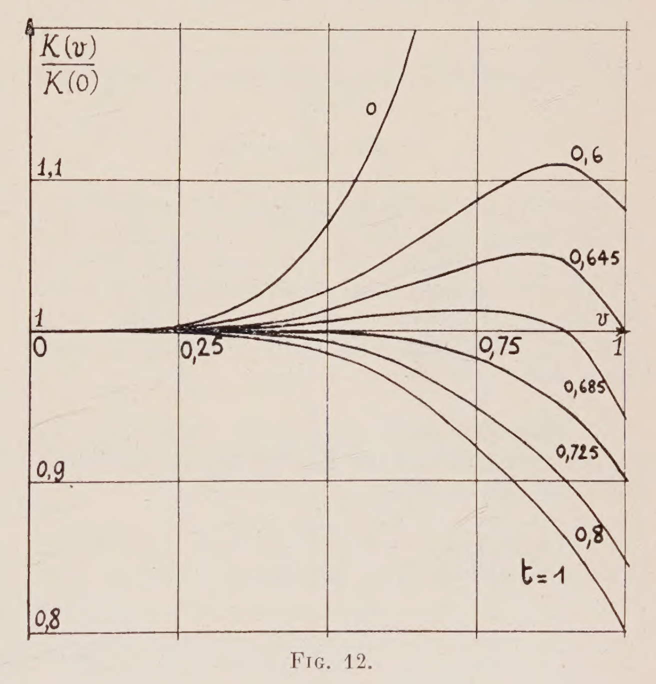


Fig. 12.

sont portées sur la figure 12 ; la valeur $t = 0{,}7265$ annule le terme en u^4 du gradient développé sous la forme

$$K(X) = K(0)\ [1 - 5A_4\,u^4 + 9A_8\,u^8].$$

Pour $t = 1$, on retrouve la courbe de la figure 6 ; pour $t = 0$, on a le cas des quatre fils. Enfin, pour $t = 0{,}685$, le gradient varie de 2 % de $u = 0$ à $u = 0{,}9$. Les variations sur Ox sont du même ordre, mais de sens contraire. Il est donc possible, avec quatre couches minces de largeur l inférieure au côté b du carré sur lesquelles elles sont fixées,

d'obtenir des répartitions d'induction à gradient quasi-constant.

La décroissance du gradient $K(0)$ avec t, lorsque la densité de courant j reste constante dans la couche, est donnée figure 13. Pour accroître $K(0)$,

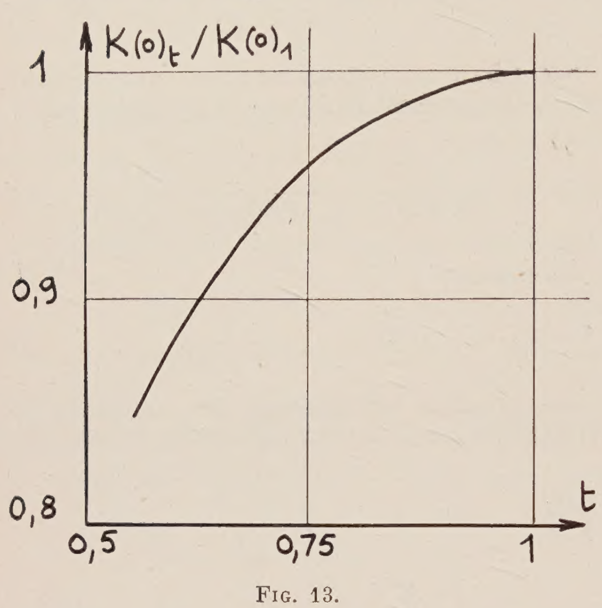


Fig. 13.

on pourrait multiplier les couches (en gardant par exemple $t_n = l_n/b_n$ égal à t_0), ce qui entraînerait encore un « adoucissement » des variations de $K(X)$ Nous avons préféré atténuer ces variations en utilisant des bobinages de section rectangulaire, pour lesquelles les expressions de B et de $K(X)$ sont plus simples.

VI. Induction créée par quatre bobinages de section rectangulaire et à densité de courant constante disposés en carré.

6-1. Induction. — On choisit tout d'abord des bobines de section $2a \times 2b$, disposées comme l'indique la figure 14.

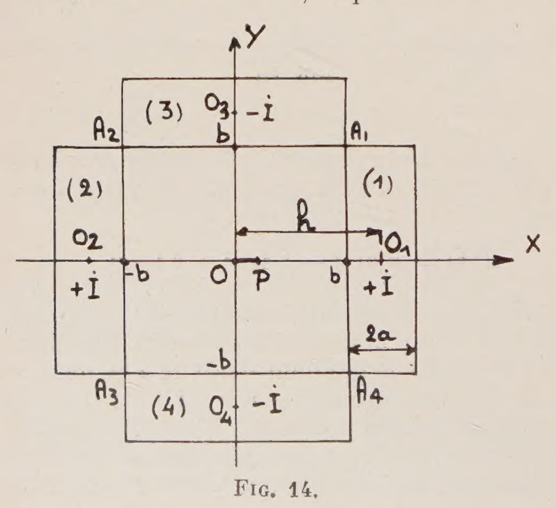


Fig. 14.

Les bobines (1) et (2) transportent un courant total $+ I = 4abj$, et les deux autres un courant $- I$. Soit O_1 le centre de la bobine (1). On pose $\overline{OO_1} = h$, $h + a = \beta$, $h - a = \gamma$ et $\lambda = \mu_0 I/8\pi ab$.

En un point P de OX, on obtient (voir Appendice II) :

$$\frac{B_Y}{\lambda} = \gamma \operatorname{Log} \frac{(X+\beta)^2+\gamma^2}{(X-\beta)^2+\gamma^2} - \beta \operatorname{Log} \frac{(X+\gamma)^2+\beta^2}{(X-\gamma)^2+\beta^2}$$
$$+ 2\gamma \left[\operatorname{Arc\,tg} \frac{X+\gamma}{\beta} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{X-\gamma}{\beta}\right]$$
$$- 2\beta \left[\operatorname{Arc\,tg} \frac{X+\beta}{\gamma} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{X-\beta}{\gamma}\right]$$
$$+ 2X \left[\left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{X+\gamma}{\beta} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{X-\gamma}{\beta}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{X+\beta}{\gamma} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{X-\beta}{\gamma}\right)\right]. \tag{34}$$

Au voisinage de O, on peut développer B_Y :

$$B_Y = \frac{-\mu_0 \dot{I}}{2\pi a(h-a)} . \operatorname{Arc\,tg} \frac{2ah}{h^2-a^2} X .$$
$$. \left[1 - \frac{1}{10} \frac{ah(h^2-a^2)}{(h^2+a^2)^4} \frac{X^4}{\operatorname{Arc\,tg} \frac{2ah}{h^2-a^2}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{72} \frac{ah(h^2-a^2)}{(h^2+a^2)^8} . \frac{a^4+h^4-6a^2h^2}{\operatorname{Arc\,tg} \frac{2ah}{h^2-a^2}} . X^8 - \dots\right] \tag{34b}$$

6-2. Gradient $K(X)$. — Par dérivation, on obtient pour $K(X)$ une expression relativement simple, formée seulement par le coefficient du terme en X de (34) :

$$\frac{K(X)}{\lambda} = 2 \left[\left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{X+\gamma}{\beta} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{X-\gamma}{\beta}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{X+\beta}{\gamma} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{X-\beta}{\gamma}\right)\right] \tag{35}$$

ou, en fonction de j, du rapport $\alpha = a/b$ et de $u = X/b$

$$K(X) = -\frac{\mu_0 j}{\pi} \left[\operatorname{Arc\,tg} \frac{4\alpha(1+\alpha) - u^2}{2(1+2\alpha)}\right.$$
$$\left. + \operatorname{Arc\,tg} \frac{4\alpha(1+\alpha) + u^2}{2(1+2\alpha)}\right]. \tag{36}$$

En $u = 0$, on aurait :

$$K(0) = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{2\pi ab} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2ah}{h^2-a^2} \tag{37a}$$

ou

$$K(0) = -\frac{2\mu_0 j}{\pi} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2\alpha(1+\alpha)}{1+2\alpha}. \tag{37b}$$

Les courbes donnant $K(X)/K(0)$ pour différentes valeurs de α sont portées sur la figure 15 pour $0 < \alpha < 1$.

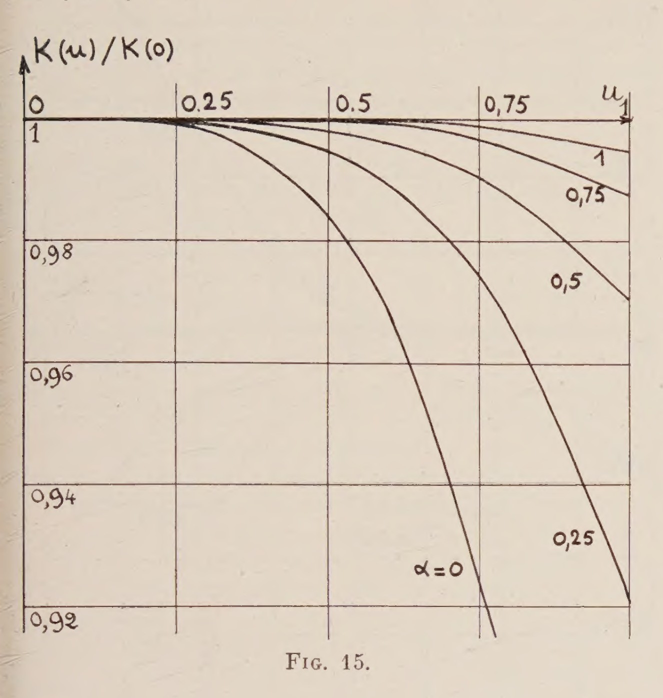


FIG. 15.

Si $\alpha = 0{,}5$ (bobines d'épaisseur $2a = b$), l'écart $K(b) - K(0)/K(0)$ est de l'ordre de 3 %. Si $\alpha = 1$, l'écart atteint seulement 0,5 %. Il y aura donc un gros avantage à utiliser des bobinages épais, de forme rectangulaire plutôt que trapézoïdale (comparer à la figure 10). Les courbes ainsi obtenues montrent qu'on peut comparer avantageusement ces répartitions d'induction avec celles qu'on obtient effectivement avec les lentilles quadrupolaires classiques.

Lorsque α croît, j restant constant, $K(0)$ croît selon la loi représentée par la courbe (2) de la figure 9. On voit que pour une même épaisseur des bobines, l'écart est faible entre les courbes (1) (bobines trapézoïdales) et (2) (bobines rectangulaires), bien que le courant total soit bien plus important dans le 1er cas ($I_1/I_2 = 1 + \alpha$).

Notons enfin que les courbes donnant B_Y ou $K(X)$ sont obtenues à mieux que 10^{-3} près en utilisant les développements limités au 2e terme (en X^4 ou x^4).

6-3. COMPARAISON AVEC UNE LENTILLE A FER SANS PÔLES. — Hand et Panofsky ont proposé récemment [4] la construction de lentilles à fer sans pôles, composées de bobines du type précédent placées dans une carcasse d'acier doux. On ne connaît de ces lentilles que l'expression du terme fondamental du gradient [4], [5], qui s'écrit, dans le cas d'une lentille à ouverture carrée de côté $2b$, avec des bobines d'épaisseur $2a$:

$$K(0)_{\text{fer}} = \frac{\mu_0 \dot{I}}{2(h^2 - a^2)} \tag{38}$$

au lieu de

$$K(0)_{\text{air}} = \frac{\mu_0 \dot{I}}{2\pi a(h - a)} \,.\, \text{Arc tg} \frac{2ah}{h^2 - a^2}. \tag{39}$$

D'où, pour une même intensité I un rapport

$$\frac{K(0)_{\text{fer}}}{K(0)_{\text{air}}} = \frac{\pi a}{(h + a) \text{ Arc tg} \dfrac{2ah}{h^2 - a^2}}. \tag{40}$$

Ce rapport, égal à $\pi/2$ si $a = 0$, n'est plus que de 1,23 environ si $b = 2a$, et tend vers 1 si a devient très grand.

VII. **Bobines rectangulaires de largeur inférieure au côté du carré.** — Par analogie avec le cas des couches minces, ici encore on peut espérer réduire les variations de $K(X)$ en agissant sur le rapport $t = l/b$.

7-1. INDUCTION ET GRADIENT SUR OX. — La

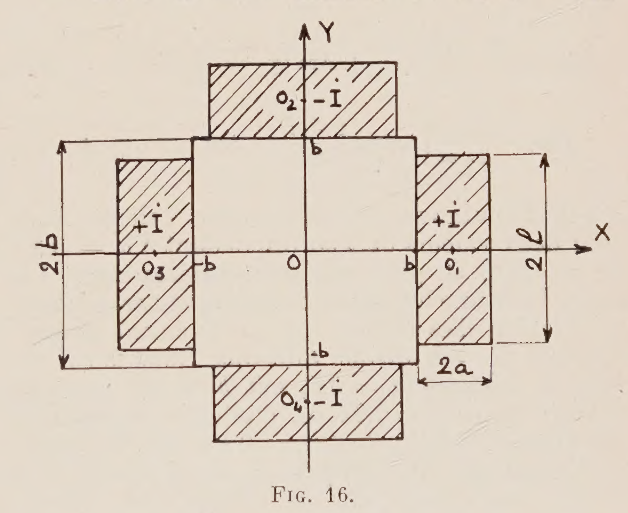


FIG. 16.

section des bobines est maintenant $2l \times 2a$ (*fig.* 16) et j reste constant. En posant :

$$\lambda = \frac{\mu_0 j}{2\pi} = \frac{\mu_0 \dot{I}}{8\pi\, al}, \; h + a = \beta \text{ et } h - a = \gamma$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{B_Y}{\lambda} = l &\left[\text{Log} \frac{(X + \beta)^2 + l^2}{(X - \beta)^2 + l^2} - \text{Log} \frac{(X + \gamma)^2 + l^2}{(X - \gamma)^2 + l^2}\right] \\ &+ \gamma \text{ Log} \frac{(X + l)^2 + \gamma^2}{(X - l)^2 + \gamma^2} - \beta \text{ Log} \frac{(X + l)^2 + \beta^2}{(X - l)^2 + \beta^2} \\ &+ 2\gamma \left(\text{Arc tg} \frac{X + \gamma}{l} + \text{Arc tg} \frac{X - \gamma}{l}\right) \\ &- 2\beta \left(\text{Arc tg} \frac{X + \beta}{l} + \text{Arc tg} \frac{X - \beta}{l}\right)\end{aligned}$$

$$+ 2l\left[\left(\text{Arc tg}\frac{X+l}{\beta} + \text{Arc tg}\frac{X-l}{\beta}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\text{Arc tg}\frac{X+l}{\gamma} + \text{Arc tg}\frac{X-l}{\gamma}\right)\right]$$
$$+ 2X\left[\left(\text{Arc tg}\frac{X+\gamma}{l} - \text{Arc tg}\frac{X-\gamma}{l}\right)\right.$$
$$-\left(\text{Arc tg}\frac{X+\beta}{l} - \text{Arc tg}\frac{X-\beta}{l}\right)$$
$$+\left(\text{Arc tg}\frac{X+l}{\beta} - \text{Arc tg}\frac{X-l}{\beta}\right)$$
$$\left.-\left(\text{Arc tg}\frac{X+l}{\gamma} - \text{Arc tg}\frac{X-l}{\gamma}\right)\right]. \quad (41)$$

L'expression de $K(X)$ est encore relativement simple : ici encore elle est constituée uniquement par le coefficient du terme en X.

Posons

$$l/b = t, \quad \beta/\gamma = \nu = 1 + 2\alpha \quad \text{et} \quad X/b = u.$$

On obtient :

$$\frac{K(u)}{2\lambda} = \left(\text{Arc tg}\frac{1-t^2+u^2}{2t} + \text{Arc tg}\frac{1-t^2-u^2}{2t}\right)$$
$$-\left(\text{Arc tg}\frac{\nu^2-t^2+u^2}{2\nu t} + \text{Arc tg}\frac{\nu^2-t^2-u^2}{2\nu t}\right) \quad (42)$$

$$K(0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, al}\left(\text{Arc tg}\frac{1-t^2}{2t} - \text{Arc tg}\frac{\nu^2-t^2}{2\nu t}\right). \quad (43)$$

7-2. Résultats. — Nous avons calculé $K(u)$ pour deux valeurs de ν correspondant à $\alpha = 0{,}25$ et $\alpha = 0{,}5$, et pour quelques valeurs de t. La figure 17 donne les courbes ainsi obtenues. Comme pour les couches minces, il y a relèvement du gradient en $X = b$ lorsque t décroît. Dans le cas de bobines épaisses ($\alpha = 0{,}5$, soit $b = 2a$), on peut obtenir pour $t = 0{,}92$ un gradient constant à mieux que 3.10^{-3} près de $u = 0$ à $u = 1$, et l'écart ne dépasse pas 10^{-4} jusqu'en $u = 0{,}9$ (soit 4.10^{-5} entre l'induction B_Y et l'induction idéale $B_i = K(0)X$. Pour des bobines minces ($a/b = 0{,}25$ par exemple), l'écart serait plus grand.

Lorsque l décroît, le gradient $K(0)$ varie selon la loi de la figure 18 sur laquelle on a représenté, pour $\alpha = 0{,}5$ la courbe $K(0)_t/K(0)_1$.

Si $t = 1$, on a :

$$K(0) = -\frac{2\mu_0 i}{\pi}\,\text{Arc tg}\,\frac{3}{4} = -\frac{1{,}287\,\mu_0 i}{\pi}$$

et pour $t = 0{,}92$:

$$K(0) = -\frac{1{,}25\,\mu_0 i}{\pi}$$

c'est-à-dire une réduction de 3 % environ, alors que la section des bobines, et par conséquent I, a subi une réduction de 8 %.

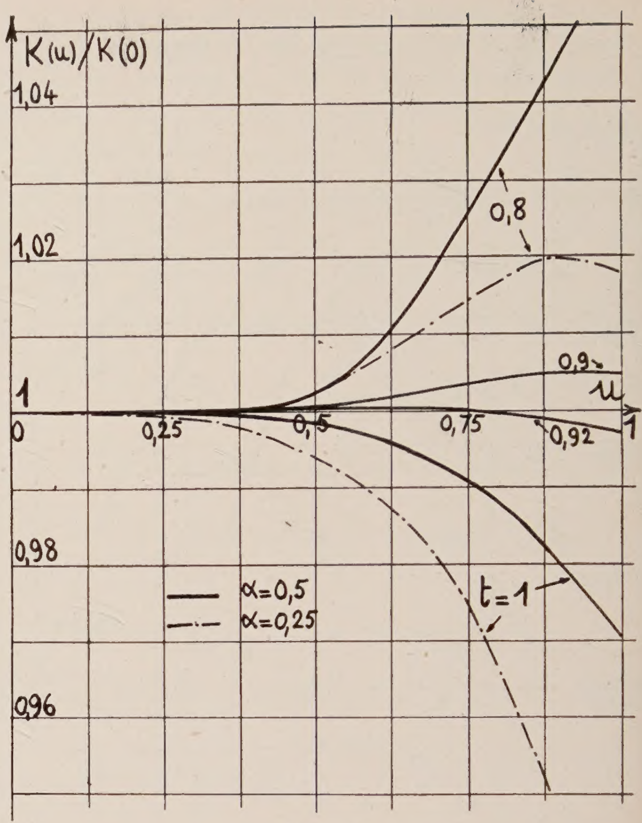


Fig. 17.

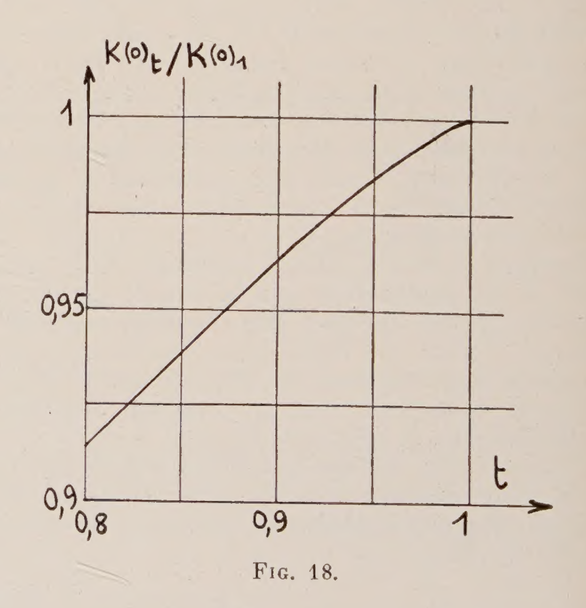


Fig. 18.

VIII. **Conclusion.** — Des répartitions d'inductions à gradient constant peuvent être obtenues avec une bonne approximation, grâce à des bobinages sans fer, à densité constante, placés sur les côtés d'un carré : soit des nappes minces de courant de largeur $2l$ inférieure au côté $2b$ du carré ; soit

des bobines rectangulaires de largeur $2b$ et d'épaisseur $2a$, ou mieux, de largeur $2l$ légèrement inférieure à $2b$.

On peut donc envisager la construction de lentilles quadrupolaires sans fer ayant des aberrations équivalentes ou inférieures à celles des lentilles à fer classiques. Cette aberration d'ouverture peut s'annuler lorsque le gradient croît selon OX et décroît sur Ox [1] : les lentilles à bobines rectangulaires pourront donc être corrigées, par un choix approprié du rapport $\alpha = a/b$.

Pour un même courant total I dans chaque bobine, le gradient est inférieur à celui d'une lentille à fer classique, mais on pourra utiliser avantageusement ces lentilles sans fer dans deux domaines : celui des champs faibles, où on évitera les phénomènes parasites dûs au champ rémanent ; celui des champs très forts, en impulsions ou en continu, évitant ainsi la limitation due à la saturation du fer des carcasses magnétiques.

Tous les calculs ont été effectués pour des nappes ou bobines indéfinies suivant Oz. Comme dans toutes les lentilles réelles, les champs de fuites d'extrémité joueront un rôle important, tout au moins pour des lentilles courtes, mais les répartitions d'induction dans ces champs de fuite ne sont pas calculables. Seules, des mesures permettront d'en tracer la carte, de déterminer les aberrations de ces lentilles, et de les comparer à celles des lentilles quadrupolaires classiques. Les résultats de ces expériences feront l'objet d'une autre publication.

APPENDICE I

Expression de l'induction créée par un fil, une nappe mince et une barre rectangulaire

1) Fil. — Soit un conducteur indéfini parallèle à Oz de section $ds = d\xi . d\eta$ (*fig.* 19) situé en un

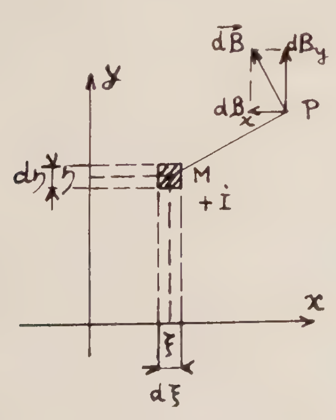


Fig. 19.

point M de coordonnées ξ et η et transportant un courant $+ I$. En un point $P(x, y)$ l'induction $\boldsymbol{dB}$ est telle que

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{MP} \quad \text{avec} \quad I = j . d\xi . d\eta$$

j est la densité de courant. En projetant sur les directions Ox et Oy on obtient :

$$dB_x = -\frac{\mu_0 j}{2\pi}\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\, d\xi\, d\eta \tag{45}$$

$$dB_y = +\frac{\mu_0 j}{2\pi}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\, d\xi\, d\eta.$$

2) Bande mince. — On considère une bande mince d'épaisseur $d\xi$ située en $x = \xi$, parallèle à Oz et s'étendant de $y = - b$ à $y = + b$ (*fig.* 20).

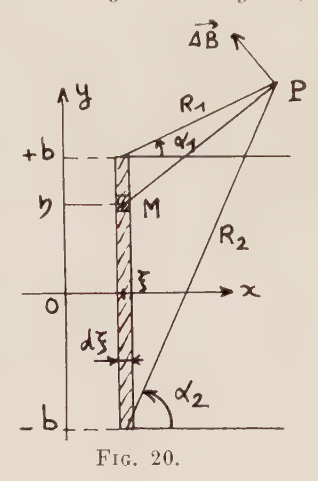


Fig. 20.

L'induction $\boldsymbol{\Delta B}$ créée en P par cette bande s'obtient en intégrant les expressions (45).

On pose :

$$x - \xi = a \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{\mu_0 j}{2\pi}.$$
$$y - \eta = u$$

On a alors

$$\Delta B_x = + \lambda\, d\xi \int_{y+b}^{y-b} \frac{u}{a^2+u^2}\, du$$

$$\Delta B_y = - \lambda\, d\xi \int_{y+b}^{y-b} \frac{a}{a^2+u^2}\, du$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta B_x &= \frac{\lambda}{2}\, d\xi \,\text{Log}\, \frac{(x-\xi)^2+(y-b)^2}{(x-\xi)^2+(y+b)^2} \\ \Delta B_y &= - \lambda\, d\xi \left(\text{Arc tg}\, \frac{x-\xi}{y+b} - \text{Arc tg}\, \frac{x-\xi}{y-b}\right). \end{aligned}\right. \tag{46a}$$

On peut exprime aussi ΔB_x et ΔB_y en fonction de l'intensité totale $I = 2bj\, d\xi$, des distances $R_1\, R_2$ et des angles α_1 et α_2 (avec les sens indiqués sur la figure 20)

$$\left\{\begin{aligned} \Delta B_x &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi b}\,\text{Log}\,\frac{R_2}{R_1} \\ \Delta B_y &= + \frac{\mu_0 I}{4\pi b}(\alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned}\right. \tag{46b}$$

3) Barre rectangulaire. — Soit une barre de

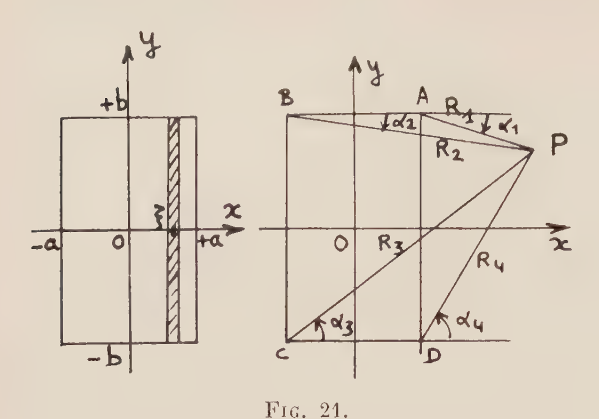


Fig. 21.

section $2a \times 2b$, centrée en O et transportant un courant $+I$ de densité $j = I/4ab$ (*fig.* 21*a*)

$$B_x = -\frac{\lambda}{2}\int_{-a}^{+a} \text{Log}\,\frac{(x-\xi)^2+(y+b)^2}{(x-\xi)^2+(y-b)^2}\,d\xi$$

$$B_y = -\lambda\int_{-a}^{+a}\left(\text{Arc tg}\,\frac{x-\xi}{y+b} - \text{Arc tg}\,\frac{x-\xi}{y-b}\right)d\xi.$$

On pose :

$$x - \xi = v, \quad y + b = \alpha_1 \quad \text{et} \quad y - b = \alpha_2$$

$$B_x = +\frac{\lambda}{2}\int_{x+a}^{x-a}(\text{Log}\,(v^2+\alpha_1^2) - \text{Log}\,(v^2+\alpha_2^2))\,dv$$

$$B_y = \lambda\int_{x+a}^{x-a}\left(\text{Arc tg}\,\frac{v}{\alpha_1} - \text{Arc tg}\,\frac{v}{\alpha_2}\right)dv.$$

On utilise les relations

$$\int \text{Log}\,(v^2+\alpha^2)\,dv = v\,\text{Log}\,(v^2+\alpha^2) - 2v + 2\alpha\,\text{Arc tg}\,(v/\alpha)$$

et

$$\int \text{Arc tg}\,\frac{v}{\alpha}\,dv = v\,\text{Arc tg}\,\frac{v}{\alpha} - \frac{\alpha}{2}\,\text{Log}\,(v^2+\alpha^2).$$

On obtient finalement

$$\frac{B_x}{\lambda} = \frac{x+a}{2}\,\text{Log}\,\frac{(x+a)^2+(y-b)^2}{(x+a)^2+(y+b)^2} \quad (49)$$

$$+ \frac{x-a}{2}\,\text{Log}\,\frac{(x-a)^2+(y+b)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$+ (y+b)\left(\text{Arc tg}\,\frac{y+b}{x+a} - \text{Arc tg}\,\frac{y+b}{x-a}\right)$$

$$+ (y-b)\left(\text{Arc tg}\,\frac{y-b}{x-a} - \text{Arc tg}\,\frac{y-b}{x+a}\right)$$

$$\frac{B_y}{\lambda} = \frac{y+b}{2}\,\text{Log}\,\frac{(x+a)^2+(y+b)^2}{(x-a)^2+(y+b)^2}$$

$$+ \frac{y-b}{2}\,\text{Log}\,\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(x+a)^2+(y-b)^2}$$

$$+ (x+a)\left(\text{Arc tg}\,\frac{x+a}{y-b} - \text{Arc tg}\,\frac{x+a}{y+b}\right)$$

$$+ (x-a)\left(\text{Arc tg}\,\frac{x-a}{y+b} - \text{Arc tg}\,\frac{x-a}{y-b}\right)$$

ou, sous une autre forme, en utilisant les notations de la figure 21*b*

$$\begin{cases} B_x = \dfrac{\mu_0\,i}{8\pi\,ab}\left[(x+a)\,\text{Log}\,\dfrac{R_2}{R_3} + (x-a)\,\text{Log}\,\dfrac{R_4}{R_1} + (y+b)\,(\alpha_3-\alpha_4) + (y-b)\,(\alpha_1-\alpha_2)\right] \\ B_y = \dfrac{\mu_0\,i}{8\pi\,ab}\left[(y+b)\,\text{Log}\,\dfrac{R_3}{R_4} + (y-b)\,\text{Log}\,\dfrac{R_1}{R_2} + (x+a)\,(\alpha_3-\alpha_2) + (x-a)\,(\alpha_1-\alpha_4)\right]. \end{cases} \quad (50)$$

APPENDICE II

Association de quatre nappes ou bobines

1. **Association de 4 nappes minces.** — 1-1. Expression de B en un point quelconque. — Il suffit d'écrire les expressions de B_x et B_y pour chaque nappe dans le nouveau système de coordonnées OX et OY, et de faire la somme, pour les

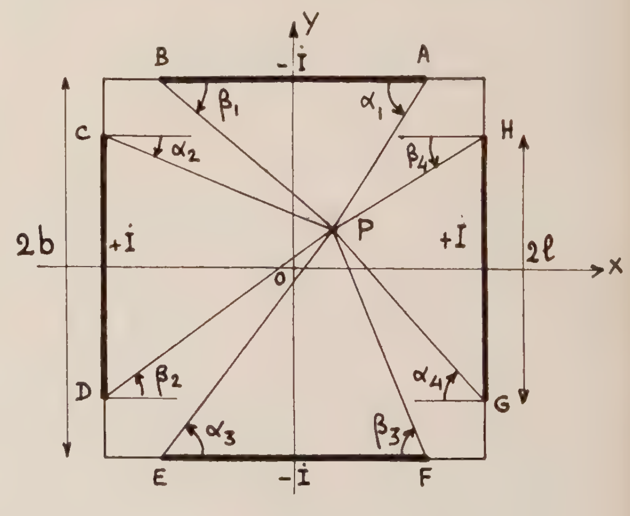


Fig. 22.

quatre couches, des composantes correspondantes. La largeur des nappes $2l$ est inférieure à b (*fig.* 22). On a en P :

$$B_X = -\frac{\mu_0\,i}{4\pi\,l}\left[\text{Log}\,\frac{\text{PD}.\text{PG}}{\text{PC}.\text{PH}} + (\beta_1-\beta_3) + (\alpha_3-\alpha_1)\right].$$

$$B_Y = -\frac{\mu_0\,i}{4\pi\,l}\left[\text{Log}\,\frac{\text{PB}.\text{PE}}{\text{PA}.\text{PF}} + (\beta_4-\beta_2) + (\alpha_2-\alpha_4)\right]. \quad (51)$$

1-2. Valeur de B sur les axes. — Sur OX, on obtient, par raison de symétrie :

$$B_X = 0$$

$$B_Y = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi l}\left(\text{Log}\frac{\text{PB}^2}{\text{PA}^2} + 2(\beta_4 - \beta_2)\right)$$

soit :

$$B_Y = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi l}\left[\text{Log}\frac{b^2 + (X+l)^2}{b^2 + (X-l)^2} + 2\left(\text{Arc tg}\frac{l}{b-X} - \text{Arc tg}\frac{l}{b+X}\right)\right] \quad (52)$$

$$= \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi l}\left[\text{Log}\frac{1 + \dfrac{2lX}{X^2+b^2+l^2}}{1 - \dfrac{2lX}{X^2+b^2+l^2}} + 2\,\text{Arc tg}\frac{2lX}{l^2+b^2-X^2}\right]$$

et, en utilisant la relation $\text{Log}\dfrac{1+x}{1-x} = 2\,\text{Arg th}\,x$

$$B_Y = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{2\pi l}\left[\text{Arg th}\frac{2lX}{b^2+l^2+X^2} + \text{Arc tg}\frac{2lX}{b^2+l^2-X^2}\right]. \quad (53)$$

Pour obtenir un développement limité au voisinage de O, il est commode de poser $l/b = t$ et $X/b = u$. On obtient alors :

$$B_Y = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{2\pi l}\left[\text{Arg th}\left\{\frac{2t}{1+t^2}\cdot u\left(1 + \frac{u^2}{1+t^2}\right)^{-1}\right\} + \text{Arc tg}\left\{\frac{2t}{1+t^2}\, u\left(1 - \frac{u^2}{1+t^2}\right)^{-1}\right\}\right]. \quad (54)$$

En utilisant les relations :

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\text{Arg th}\, y = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots$$

$$\text{Arc tg}\, z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

on peut développer jusqu'au terme en u^9. Conformément aux résultats généraux du § 1, seuls subsistent les termes en u, u^5 et u^9, et on a l'expression :

$$B_Y = -\frac{2\mu_0 I}{\pi b(1+t^2)}\cdot u\left[1 - \frac{10t^2 - t^4 - 5}{5(1+t^2)^4}\, u_4 + \frac{9 - 84t^2 + 126t^4 - 36t^6 + t^8}{9(1+t^2)^8}\, u^8 - \dots\right] \quad (55)$$

soit :

$$B_Y = +K(0)\, X(1 - A_4 u^4 + A_8 u^8).$$

Sur Ox, les formules sont plus compliquées. On obtient :

$$B_X = B_Y \quad \text{et} \quad B_x = B_Y\sqrt{2}$$

$$B_Y = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi l}\left[\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{\text{PD.PG}}{\text{PC.PH}}\right)^2 + (\beta_1 - \beta_3) + (\alpha_3 - \alpha_1)\right] \quad (56)$$

soit, avec les mêmes notations que précédemment

$$B_Y = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi l}\left[\text{Arg th}\left\{\frac{2u(1+t)}{1+t^2}\cdot\left(1 + \frac{2u^2}{1+t^2}\right)^{-1}\right\} + \text{Arc tg}\left\{\frac{2u(1+t)}{1+t^2}\cdot\left(1 - \frac{2u^2}{1+t^2}\right)^{-1}\right\} - \text{Arg th}\left\{\frac{2u(1-t)}{1+t^2}\cdot\left(1 + \frac{2u^2}{1+t^2}\right)^{-1}\right\} - \text{Arc tg}\left\{\frac{2u(1-t)}{1+t^2}\cdot\left(1 - \frac{2u^2}{1+t^2}\right)^{-1}\right\}\right]. \quad (57)$$

Après des calculs fastidieux, on retrouve bien

$$B_x = +K(0)x\,[1 + A_4 v^4 + A_8 v^8] \quad \text{avec} \quad v = x/b$$

et

$$K(0) = -2\mu_0 \dot{I}/\pi b^2(1+t^2). \quad (58)$$

1-3. Gradient. — Le gradient sur OX est obtenu par dérivation de (54) :

$$K(X) = K(0)\,\frac{1 + \dfrac{3-t^2}{(1+t^2)^3}u^4}{1 + \dfrac{2u^4(6t^2 - t^4 - 1) + u^8}{(1+t^2)^4}}. \quad (59)$$

Le développement de cette expression donne

$$K(X) = K(0)\,[1 - 5A_4 u^4 + 9A_8 u^8 - \dots].$$

1-4. Cas particulier : $t = 1$. — Il est évidemment plus simple de calculer B et K directement, mais on peut les tirer des expressions générales :

Sur OX :

$$B_Y = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{2\pi b}\left[\text{Arg th}\frac{2u}{2+u^2} + \text{Arc tg}\frac{2u}{2-u^2}\right] \quad (60)$$

$$K(X) = -K(0)\left(1 + \frac{u^4}{4}\right)^{-1}. \quad (61)$$

Sur Ox :

$$B_Y = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi b}\left[\text{Arg th}\frac{2u}{1+u^2} + \text{Arc tg}\frac{2u}{1-u^2}\right] \quad (62)$$

ou

$$B_Y = -\frac{\mu_0 \dot{I}}{2\pi b}\,[\text{Arg th}\, u + \text{Arc tg}\, u] \quad (63)$$

$$K(x) = K(0)\,[1 - u^4]^{-1} = K(0)\left(1 - \frac{v^4}{4}\right)^{-1} \quad (64)$$

en posant

$$v = x/b$$

et

$$K(0) = \mu_0 \dot{I}/\pi b^2. \quad (65)$$

II. **Association de quatre bobines rectangulaires de largeur égale au côté du carré.** — Par suite de la complication des expressions donnant B_X et B_Y en un point quelconque, nous ne les donnerons que sur OX et Ox.

2-1. Induction et gradient sur OX (*fig.* 14). On a $OO_1 = h$. Les bobines (1) et (2) transportent le courant $+ I$ et les bobines (3) et (4) le courant $- I$. On pose $h + a = \beta$, $h - a = \gamma$ et $\lambda = \mu_0 I/8\pi ab = \mu_0 j/2\pi$.

Il vient :

$$\begin{aligned}\frac{B_Y}{\lambda} = {} & \gamma \operatorname{Log} \frac{(X+\beta)^2 + \gamma^2}{(X-\beta)^2+\gamma^2} - \beta \operatorname{Log} \frac{(X+\gamma)^2+\beta^2}{(X-\gamma)^2+\beta^2} \\ & + 2\gamma \left[\operatorname{Arc\,tg} \frac{X+\gamma}{\beta} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{X-\gamma}{\beta}\right] \\ & - 2\beta \left[\operatorname{Arc\,tg} \frac{X+\beta}{\gamma} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{X-\beta}{\gamma}\right] \\ & + 2X \left[\left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{X+\gamma}{\beta} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{X-\gamma}{\beta}\right)\right. \\ & \left. - \left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{X+\beta}{\gamma} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{X-\beta}{\gamma}\right)\right]. \qquad (66)\end{aligned}$$

Pour effectuer le développement de cette expression au voisinage de O, il est commode de poser

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \quad \text{et} \quad X^2/\alpha^2 = u^2.$$

Les quatre premiers termes de (66) peuvent alors être mis sous la forme

$$\begin{aligned}F_1(X) = {} & 2\gamma \operatorname{Arg\,th} \left(\frac{2\beta}{\alpha} u(1+u^2)^{-1}\right) \\ & - 2\beta \operatorname{Arg\,th} \left(\frac{2\gamma}{\alpha} u(1+u^2)^{-1}\right) \\ & + 2\gamma \operatorname{Arc\,tg} \left(\frac{2\beta}{\alpha} u(1-u^2)^{-1}\right) \\ & - 2\beta \operatorname{Arc\,tg} \left(\frac{2\gamma}{\alpha} u(1-u^2)^{-1}\right). \qquad (67a)\end{aligned}$$

Le développement de ces termes s'écrit, après retour aux grandeurs a, h et X :

$$\begin{aligned}F_1(X) = {} & - \frac{8}{5} \frac{ah(h^2-a^2)}{(h^2+a^2)^4} X^5 \\ & + \frac{4}{9} \frac{ah(h^2-a^2)}{(h^2+a^2)^8} (h^4 - 6h^2 a^2 + a^4) X^9 - \ldots \qquad (67b)\end{aligned}$$

Le terme en X de (66) est de la forme

$$F_2(X) = 2X \left[\operatorname{Arc\,tg} \frac{2\beta\gamma}{\beta^2 - \gamma^2 + X^2} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{2\beta\gamma}{\gamma^2 - \beta^2 + X^2}\right] \qquad (68a)$$

$$F_2(X) = -2X \left[\operatorname{Arc\,tg} \left\{\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\beta\gamma}\left(1 - \frac{X^2}{\beta^2-\gamma^2}\right)\right\} + \operatorname{Arc\,tg} \left\{\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\beta\gamma}\left(1 + \frac{X^2}{\beta^2-\gamma^2}\right)\right\}\right] \qquad (68b)$$

ou, en posant

$$(\beta^2 - \gamma^2)/2\beta\gamma = k^2 \quad \text{et} \quad X^2/(\beta^2-\gamma^2) = v^2$$

$$\begin{aligned}F_2(X) & = -2X[\operatorname{Arc\,tg} k^2(1-v^2) + \operatorname{Arc\,tg} k^2(1+v^2)] \\ & = -2X(A_1(v) + A_2(v)). \qquad (68c)\end{aligned}$$

Après dérivation de $A_1(v)$ et $A_2(v)$, développement des expressions obtenues puis intégration et retour aux grandeurs initiales, on obtient :

$$\begin{aligned}F_2(X) = {} & -4X . \operatorname{Arc\,tg} \frac{2ah}{h^2-a^2} + \frac{2ah(h^2-a^2)}{(h^2+a^2)^4} X^5 \\ & - \frac{1}{2} \frac{ah(h^2-a^2)}{(h^2+a^2)^8} (a^4 - 6a^2 h^2 + h^4) \ldots \qquad (68d)\end{aligned}$$

D'où l'expression globale de

$$B_Y = F_1(X) + F_2(X)$$

$$\begin{aligned}B_Y = {} & - \frac{\mu_0 I}{2\pi\, ab} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2ah}{h^2-a^2} X \\ & \left[1 - \frac{1}{10} \frac{ah(h^2-a^2)}{(h^2+a^2)^4 \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{2ah}{h^2-a^2}} X^4 \right. \\ & \left. + \frac{1}{72} \frac{ah(h^2-a^2)(a^4+h^4-6a^2h^2)}{(h^2+a^2)^8 \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{2ah}{h^2-a^2}} X^8 - \ldots\right]\end{aligned}$$

qui permet d'obtenir les coefficients K_6 et K_{10} définis au § 1.

Si on fait tendre a vers zéro, le terme $\operatorname{Arc\,tg} \dfrac{2ah}{h^2 - a^2}$ tend vers $2a/b$ et h tend vers b.

D'où :

$$B_Y = - \frac{\mu_0 I}{\pi b^2} X \left(1 - \frac{1}{20}\left(\frac{X}{b}\right)^4 + \frac{1}{144}\left(\frac{X}{b}\right)^8 - \ldots\right)$$

on retrouve l'expression de B_Y fournie par quatre nappes minces de largeur b.

Par dérivation de (66), on s'aperçoit que seuls subsistent les termes qui constituent le coefficient de X dans $F_2(X)$ = tous les autres s'annulent deux à deux. On obtient alors :

$$\begin{aligned}K(X) = 2\lambda & \left[\left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{X+\gamma}{\beta} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{X-\gamma}{\beta}\right)\right. \\ & \left. - \left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{X+\beta}{\gamma} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{X-\beta}{\gamma}\right)\right] \qquad (70)\end{aligned}$$

ou, en fonction de $j = I/4ab$, de $\alpha = a/b$ et de $u = X/b$

$$\begin{aligned}K(u) = - \frac{\mu_0 j}{\pi} & \left[\operatorname{Arc\,tg} \frac{4\alpha(1+\alpha) - u^2}{2(1+2\alpha)}\right. \\ & \left. + \operatorname{Arc\,tg} \frac{4\alpha(1+\alpha) + u^2}{2(1+2\alpha)}\right] \qquad (71)\end{aligned}$$

et

$$K(0) = - \frac{2\mu_0 j}{\pi} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2\alpha(1+\alpha)}{1+2\alpha}. \qquad (72)$$

2-2. Induction et gradient sur Ox. — En un point P de coordonnées $X = Y = x/\sqrt{2}$, on a :

$$B_x = B_Y \sqrt{2}$$

et

$$\frac{B_Y}{\lambda} = \frac{\beta}{2}\left[\text{Log}\frac{(X+\beta)^2+(X+\gamma)^2}{(X-\beta)^2+(X+\gamma)^2} - \text{Log}\frac{(X-\beta)^2+(X-\gamma)^2}{(X+\beta)^2+(X-\gamma)^2}\right]$$
$$+\frac{\gamma}{2}\left[\text{Log}\frac{(X+\beta)^2+(X-\gamma)^2}{(X+\beta)^2+(X+\gamma)^2} - \text{Log}\frac{(X-\beta)^2+(X+\gamma^2)}{(X-\beta)^2+(X-\gamma)^2}\right]$$
$$+\beta\left[\left(\text{Arc tg}\frac{X-\beta}{X+\gamma} - \text{Arc tg}\frac{X+\beta}{X+\gamma}\right) + \left(\text{Arc tg}\frac{X-\beta}{X-\gamma} - \text{Arc tg}\frac{X+\beta}{X-\gamma}\right)\right]$$
$$+\gamma\left[\left(\text{Arc tg}\frac{X+\gamma}{X+\beta} - \text{Arc tg}\frac{X-\gamma}{X+\beta}\right) + \left(\text{Arc tg}\frac{X+\gamma}{X-\beta} - \text{Arc tg}\frac{X-\gamma}{X-\beta}\right)\right]$$
$$+2X\left[\left(\text{Arc tg}\frac{X+\gamma}{X+\beta} - \text{Arc tg}\frac{X-\gamma}{X+\beta}\right) - \left(\text{Arc tg}\frac{X+\gamma}{X-\beta} - \text{Arc tg}\frac{X-\gamma}{X-\beta}\right)\right]. \quad (73)$$

Le gradient s'écrit

$$K(x) = K(X)$$

et :

$$\frac{K(x)}{\lambda} = 2\left[\left(\text{Arc tg}\frac{X+\gamma}{X+\beta} - \text{Arc tg}\frac{X-\gamma}{X+\beta}\right) - \left(\text{Arc tg}\frac{X+\gamma}{X-\beta} - \text{Arc tg}\frac{X-\gamma}{X-\beta}\right)\right]$$

$$\frac{K(x)}{\lambda} = 2\left[\text{Arc tg}\frac{(X-\beta)^2+X^2-\gamma^2}{2\gamma(X-\beta)} - \text{Arc tg}\frac{(X+\beta)^2+X^2-\gamma^2}{2\gamma(X+\beta)}\right] \quad (74)$$

$$\frac{K(x)}{\lambda} = 2\left[\text{Arc tg}\frac{(u-(1+2\alpha))^2+u^2-1}{2u-2(1+2\alpha)} - \text{Arc tg}\frac{(u+(1+2\alpha))^2+u^2-1}{2u+2(1+2\alpha)}\right]. \quad (75)$$

Manuscrit reçu le 7 janvier 1960.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Grivet (P.) et Septier (A.), Les lentilles quadrupolaires magnétiques, CERN 58-25, octobre 1958, *Nuclear Instr. Meth.* 1960, **6**, n° 2, 126-156 et 1960, **6**, n° 3, 243-275.
[2] Dayton (I.-E.), Shoemaker (E. C.) et Mozley (R. F.), Study of Quadrupole Magnets. *R. S. I.*, 1954, **25**, n° 5, 485.
[3] Cottingham (J. G.), Moore (W. H.), Rogers (E. J.) et Turner (C. M.), (The Cosmotron) Injection System, Part II. Injection Optics. *R. S. I.*, 1953, **24**, n° 9, 816.
[4] Hand (L. N.) et Panofsky (W. K.), Magnetic Quadrupole with rectangular Aperture. *R. S. I.*, 1959, **30**, n° 10, 927-930.
[5] Van der Meer (S.), Comparison between Quadrupole Lenses of classical Design and « Panofsky Lenses », CERN PS/Int MM 59-8, août 1959. Non publié.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

SUPPLÉMENT AU N° 3.
TOME 21, MARS 1960, PAGE 16 A.

DÉTERMINATION DES COURANTS DE FOUCAULT AU MOYEN DU POTENTIEL VECTEUR ÉLECTRIQUE

Par Mintcho P. ZLATEV,
École Polytechnique de Sofia, Bulgarie.

Résumé. — Dans le présent travail on propose une méthode relativement simple pour calculer les courants de Foucault où l'on utilise le potentiel vecteur du champ électrique tourbillonnaire induit. Le vecteur indiqué est déterminé par la formule (2) où l'intégration s'étend suivant le contour magnétique inducteur fermé non ramifié. Cette méthode est basée sur la loi d'Ohm en forme différentielle, appliquant le théorème de Stokes. Les résultats obtenus (5) et (6) sont valables à conditions déterminées et peuvent être utilisés pour des calculs pratiques des appareils électriques d'induction.

Abstract. — This article shows a relatively simple method for eddy current calculation, making use of the vector potential of an induced electric rotational field. This vector is determined by equation (2), where the integration extends over a closed unbranched inducing magnetic contour. The method is based on Ohm's law in differential form, by applying Stokes' theorem. The results obtained (5) and (6) can be used for practical calculation of electrical induction apparatus.

Introduction. — Le calcul des courants de Foucault conformément à la loi d'Ohm en forme différentielle exige par principe qu'on évalue le champ électrique tourbillonnaire induit $\boldsymbol{E}$ qui provoque ces courants. On sait [1] [2] (1) que pour résoudre le problème ainsi posé on utilise le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}_B$ de l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$. Dans ce cas on part de la relation connue

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}_B}{\partial t}.$$

Par substitution dans l'expression de la loi indiquée ($\boldsymbol{\delta} = \gamma \boldsymbol{E}$) on obtient avec une certaine approximation

$$\boldsymbol{\delta} = -\gamma \frac{\partial \boldsymbol{A}_B}{\partial t},$$

où δ désigne la densité du courant de Foucault cherché i, qui traverse une section arbitraire s dans un milieu métallique de conductivité électrique γ.

Le flux du vecteur $\boldsymbol{\delta}$ à travers s représente la valeur correspondante de i.

La détermination de ce flux suppose la connaissance du potentiel vecteur magnétique

$$\boldsymbol{A}_B = \frac{\mu_0 i_e}{4\pi} \oint_\lambda \frac{\boldsymbol{d\lambda}}{r}.$$

L'intégration s'étend sur le contour λ du courant inducteur i_e dont le champ magnétique induit le courant de Foucault i. Le calcul de $\boldsymbol{A}_B$ s'accompagne de certaines difficultés particulièrement lorsqu'il s'agit d'un contour λ de forme complexe. En confirmation de ceci il suffit de rappeler que le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}_B$ du champ magnétique d'un contour de courant circulaire s'exprime au moyen d'intégrales elliptiques.

Dans le présent travail on montre que le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ du champ électrique tourbillonnaire induit $\boldsymbol{E}$ permet qu'on détermine d'une façon relativement simple le courant de Foucault i qui est induit par un contour inducteur magnétique fermé non ramifié Γ' et qui traverse une section arbitraire s limitée par un contour fermé Γ.

1. Détermination du potentiel vecteur électrique.

Dans un travail récent [3] A. V. Kalyaev introduit la notion de potentiel vecteur $\boldsymbol{A}_D$ du vecteur déplacement électrique $\boldsymbol{D}$ (par analogie avec le potentiel vecteur magnétique $\boldsymbol{A}_B$) à condition que $\rho = 0$ et div $\boldsymbol{D} = 0$.

Le vecteur

$$\boldsymbol{A}_D = \frac{\varepsilon e}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{\boldsymbol{dl'}}{r} \tag{1}$$

est calculé de la même manière que pour déterminer $\boldsymbol{A}_B$ à partir des équations de Maxwell relatives au champ électromagnétique. Dans cette formule ε désigne la perméabilité électrique du milieu, $e = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ est la tension électromotrice (la force électromotrice) induite, et

$$\Phi = \int_{S'} \boldsymbol{B}.\boldsymbol{ds'}$$

représente le flux d'induction magnétique à travers n'importe quelle section transversale s' du contour Γ'. Dans ce cas on suppose que la section s' est assez petite et la fuite des lignes d'induction magnétique est négligée.

Au moyen de la formule (1) on déduit l'expres-

(1) Les chiffres entre crochets et ceux qui suivent se rapportent aux références de la bibliographie annexée à cet article.

sion du vecteur du champ électrique tourbillonnaire induit

$$E = \frac{e}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{dl' \wedge r^0}{r^2},$$

en utilisant l'égalité

$$D = \text{rot}\, A_D$$

qui est analogue à l'égalité connue

$$B = \text{rot}\, A_B.$$

La grandeur r représente la distance entre les différents éléments linéaires dl' auxquels on peut décomposer le contour Γ' et le point où l'on détermine le champ E.

La même expression du vecteur E est retrouvée par la relation

$$E = \frac{e}{i_e} \oint_{\Gamma'} dH.$$

introduite dans le travail [4] entre le champ magnétique inducteur H et le champ électrique tourbillonnaire induit E. Dans le travail [4] à partir de l'expression du vecteur E, après transformation, on obtient plus spécialement la formule

$$A = \frac{e}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{dl'}{r} \tag{2}$$

du potentiel vecteur du champ électrique tourbillonnaire induit E étant donné que

$$E = \text{rot}\, A. \tag{3}$$

La formule (2) est valable à la condition déjà mentionnée que la section transversale s' du contour magnétique Γ' soit assez petite. Ceci est nécessaire pour qu'on puisse admettre que le module du vecteur $\partial B/\partial t$ est constant aux différents points de cette section. Dans le cas contraire on doit utiliser la formule modifiée

$$A = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \int_{S'} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{(ds' . dl')}{r} \tag{2a}$$

qui est valable pour un circuit magnétique de matériel diélectrique et non ferromagnétique.

2. **Méthode de calcul.** — Considérons un contour magnétique fermé non ramifié Γ' par exemple un circuit magnétique en fer d'un appareil électrique d'induction. Admettons que la fuite des lignes d'induction magnétique est négligée et que le flux Φ à travers toute section transversale s' du contour Γ' est le même. En outre supposons que la condition de validité de la formule (2) soit satisfaite.

Calculons le courant de Foucault i qui traverse une section arbitraire s en milieu métallique de conductivité électrique γ. En conformité avec la loi d'Ohm en forme différentielle nous avons

$$i = \gamma \int_S E . ds. \tag{4}$$

En substituant (3) dans (4) et en appliquant le théorème de Stokes on obtient

$$i = \gamma \int_S \text{rot}\, A . ds = \oint_{\Gamma} A . dl, \tag{4a}$$

où Γ désigne le contour fermé qui limite la section arbitraire s. En utilisant la formule (2) on trouve l'expression cherchée du courant de Foucault i à travers la section s.

$$i = - G \frac{d\Phi}{dt}, \tag{5}$$

où

$$G = \frac{\gamma}{4\pi} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{dl . dl'}{r}. \tag{6}$$

La grandeur G peut être appelée conductibilité équivalente du milieu pour la section considérée s car d'après la formule (5) elle représente le coefficient de proportionnalité de la tension électromotrice induite $e = - d\Phi/dt$ et le courant i.

La relation (6) est analogue à la formule de Neumann qui détermine le coefficient d'induction mutuelle M de deux contours l_1 et l_2.

Évidemment le courant de Foucault i peut être considéré comme un courant mutuel et G comme une conductibilité mutuelle par rapport aux deux contours Γ et Γ', et e comme une tension excitant le courant mutuel i.

3. **Application de la méthode.** — Toutes les formules données ci-dessus sont valables à condition que nulle part dans l'espace il n'existe de charges électriques pouvant exciter un autre champ électrique comme cela est indiqué dans le travail [3] sous la forme $\rho = 0$. En outre il faut remarquer que les formules (4), (5) et (6) sont valables si la conductivité électrique γ est la même pour tout l'espace, c'est-à-dire si le milieu remplissant l'espace est homogène.

Les problèmes qui peuvent être résolus à l'aide de la formule (5) sont du type suivant :

Supposons qu'on ait comme données les dimensions géométriques du circuit magnétique inducteur, le courant excitateur (la force magnétomotrice) $F = ni_e$, ainsi que la courbe $B = f(H)$.

Le flux d'induction magnétique $\Phi(t)$ est trouvé par la méthode graphique analytique ou bien il est mesuré expérimentalement.

Pour une section déterminée s on déduit de la formule (6) la conductibilité correspondante G.

En remplaçant dans la formule (5) nous obtenons le courant de Foucault cherché i qui traverse la section s.

Dans les formules indiquées on introduit une certaine approximation car on ne prend pas en considération le champ magnétique excité par suite de la variation du champ électrique tourbillonnaire induit $\boldsymbol{E}$. L'erreur commise est compensée dans une certaine mesure par le fait qu'on ne tient pas compte de la fuite des lignes d'induction magnétique. Les influences de ces deux champs, conformément à la loi de Lenz, sont opposées.

Les formules (5) et (6) peuvent satisfaire aux exigences de la pratique pour un corps conducteur limité lorsque la surface du corps est à peu près tangentielle aux lignes de force du champ électrique tourbillonnaire induit $\boldsymbol{E}$ dans l'espace homogène. Ceci permet d'utiliser les formules ci-dessus pour calculer les courants de Foucault dans des appareils électriques d'induction par exemple les compteurs électriques, les relais, etc.

Conclusion. — En vertu de cette étude, on peut faire les déductions suivantes :

1) L'utilisation du potentiel vecteur électrique pour calculer les courants de Foucault qui sont excités par un contour magnétique donné Γ' et qui traversent une section limitée par un contour Γ permet d'éviter les difficultés qui accompagneraient ce calcul à l'aide du potentiel vecteur magnétique.

2) On introduit la conductibilité équivalente de caractère mutuel par rapport aux deux contours fermés Γ et Γ' qui est exprimée par une formule analogue à celle du coefficient d'induction mutuelle.

3) Les résultats obtenus permettent de déterminer les moments des forces électromagnétiques qui s'exercent dans des appareils électriques d'induction. Cette détermination sera l'objet d'un autre travail.

Manuscrit reçu le 1er octobre 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Smyte (W. R.), Static and dynamic electricity, 1950.
[2] Bruhat (G.), Cours de Physique générale. Électricité, 1944.
[3] Kalyaev (A. V.), Formule de l'intensité du champ électrique. « Électricité », 1937, **3** (en russe).
[4] Zlatev (M. P.), Étude des champs électriques non potentiels, R. G. E., 1959, **9**.

SUPPLÉMENT AU N° 3.
TOME 21, MARS 1960, PAGE 19 A.

CONSTRUCTION D'UN CHRONOTRON POUR LA MESURE DU TEMPS DE VOL DES NEUTRONS RAPIDES

Par J. DUCLOS,
Laboratoire de Physique Nucléaire, Université de Grenoble.

Résumé. — Un chronotron utilisant les circuits d'enregistrement d'un sélecteur d'amplitude 100 canaux est décrit. Une dilatation du temps est obtenue à l'aide d'une distribution de 20 lampes « 6BN6 ». La largeur à mi-hauteur de la courbe de résolution est 7.10^{-10} s pour les coïncidences γ-γ du ^{60}Co et 2.10^{-9} s pour les coïncidences n-α de la réaction (d, t).

Abstract. — A chronotron using the storage circuits of a 100 channel amplitude analyser is described. A time expantion is obtained by an arrangement of « 6BN6 » tubes. The width at half maximum of prompt coincidences curve is 7×10^{-10} s for γ-γ coincidences from ^{60}Co and 2×10^{-9} s for n-α coincidences from the (d, t) reaction.

I. **Introduction.** — L'appareil qui est décrit ici a été construit dans le cadre de l'étude des réactions (n, n') $(n, 2n)$ ... entreprise au Laboratoire de Physique Nucléaire de la Faculté des Sciences de Grenoble et du Centre d'Études Nucléaires de Grenoble. La source de neutrons est obtenue en bombardant une cible de tritium par un faisceau de deutons issus d'un accélérateur électrostatique de 300 kV. Les neutrons de 14 MeV donnés par la réaction (d, t) bombardent à leur tour une cible d'étude et le problème est d'analyser le spectre d'énergie des neutrons secondaires obtenus.

Parmi les appareils susceptibles d'effectuer cette étude, les spectromètres à protons de recul ont une bonne résolution mais une efficacité faible (Cochram, 1955 ; Johnson, 1956). La méthode du temps de vol permet d'augmenter cette efficacité par un facteur 10^3 à 10^4, mais elle nécessite des circuits à coïncidences ayant un temps de résolution de l'ordre de 10^{-9} s. Par ailleurs, pour les expériences envisagées, il est nécessaire d'admettre un nombre élevé d'impulsions dans l'une des voies au moins. En effet, l'instant initial du temps de vol est déterminé par la détection de la particule α de la réaction (d, t) et le nombre d'impulsions par seconde dans cette voie peut atteindre 10^5 à 10^6. Enfin, étant donnés les faibles taux de comptage auxquels on doit s'attendre, il est utile de disposer d'un système multicanaux analysant simultanément toute l'échelle des temps.

Parmi les sélecteurs de temps du domaine de la nanoseconde, les systèmes à transformation directe du temps en amplitude repèrent les impulsions de commande par leur front de montée ; ce sont des circuits à seuils qui introduisent systématiquement une imprécision sur l'instant de déclenchement, dans le cas d'une distribution d'amplitude des impulsions. Toutefois plusieurs circuits ont été décrits permettant d'obtenir des temps de résolution physique de l'ordre de la nanoseconde. Dans le dispositif de Neilsen (1955) une capacité se charge par un courant constant pendant la durée de superposition des deux impulsions de com-

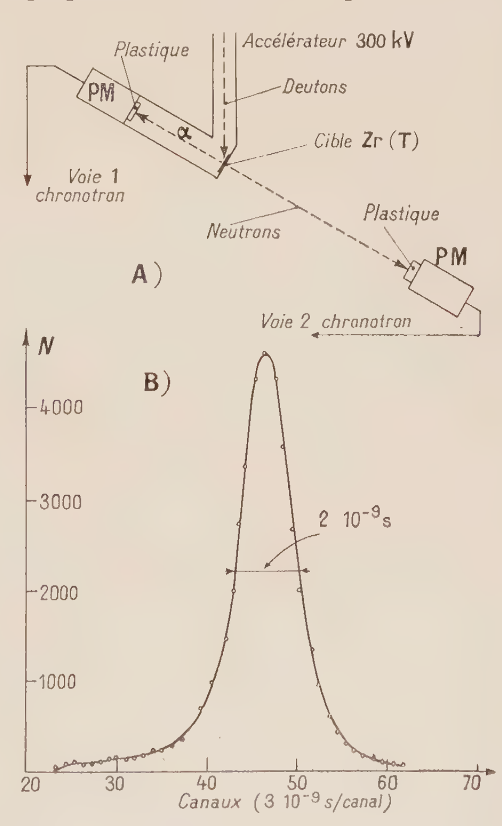


Fig. 1. — Spectromètre à neutrons rapides par temps de vol. A : Dispositif expérimental. — B : Courbe de résolution. En abscisses, lire : 3.10^{-10} s/canal.

mande précédemment calibrées. Cette charge s'effectue par l'intermédiaire d'une lampe 6BN6 qui réalise, en outre, la coïncidence. Rémy (1957) a perfectionné ce dispositif en utilisant comme cir-

cuit de coïncidences rapides une simple diode suivant la technique développée par Bell (1952). Green (1958) a présenté un circuit analogue équipé, à nouveau, d'une lampe 6BN6, qui permet d'obtenir des temps de résolution inférieurs à 10^{-9} s.

Les systèmes généralement appelés chronotrons qui repèrent les impulsions de commande par leur centre de gravité ne font pas intervenir l'erreur citée plus haut. Mais cet avantage est acquis au prix d'une complication notable des circuits électroniques, spécialement lorsque le chronotron dispose de ses propres circuits d'enregistrement (Neddermeyer, 1947 ; Keuffel, 1949 ; O'Neill, 1955 ; Meunier, 1957). La méthode qui consiste à effectuer une transformation du temps en amplitude après dilatation du temps (Cottini, 1956) est certes plus avantageuse car elle permet à la fois de repérer les impulsions par leur centre de gravité et d'utiliser les circuits d'enregistrement d'un sélecteur d'amplitude multicanaux, appareil existant déjà dans la plupart des laboratoires. Une solution analogue a été adoptée en partant d'un chronotron décrit par O'Neill (1955). Dans ce type de chronotron, les impulsions de commande se propagent en sens inverse dans deux lignes à faible retard parallèles construites sur les grilles de commande de lampes 6BN6 suivant la technique des amplificateurs distribués. Les impulsions de courant plaque résultant de coïncidences sont enregistrées dans une ligne à grand retard. On recherche dans cette ligne la position de l'impulsion de coïncidence maximum traduisant la superposition du centre de gravité des deux impulsions de commande. On en déduit alors le retard primitif de l'une des impulsions sur l'autre. Dans le chronotron O'Neill, la position de l'impulsion de coïncidence maximum n' est donnée que par valeurs discrètes. Il en résulte une largeur de canal minimum de 4 10^{-9} s. On a cherché alors à obtenir dans la ligne à grand retard, l'enveloppe de l'amplitude des impulsions de coïncidence. On effectue ainsi une interpolation continue entre les valeurs discrètes ci-dessus et la largeur du canal peut être aussi petite qu'on le désire.

L'avantage des lampes 6BN6 dans ce type de montage est de deux sortes. En premier lieu, seule une coïncidence peut donner naissance à une impulsion de courant plaque et par suite influencer les circuits d'analyse, dont le temps mort est généralement important. Ainsi on peut admettre, dans l'une des voies un nombre élevé d'impulsions, tant que le taux de coïncidences reste faible. Par ailleurs, les parties négatives d'impulsions sont sans action sur les grilles de commande, celles-ci étant polarisées légèrement au-dessous du « cut-off ». Or on sait que le temps de résolution diminue lorsqu'on « coupe » l'impulsion à l'aide d'un câble court-circuité, de longueur déterminée, n'utilisant ainsi qu'une fraction de l'impulsion correspondant aux premiers photo-électrons produits. Mais cette opération fait intervenir une partie inverse importante de l'impulsion. Dans beaucoup de chronotrons à diodes cette partie inverse ne peut être admise et on perd un moyen efficace de diminuer le temps de résolution.

II. **Description du chronotron.** — Le chronotron est schématisé par la figure 2. Les impulsions de commande arrivent aux instant t_1 et t_2 aux deux extrémités opposées E_1 et E_2 des lignes à faible retard. La ligne des grilles g_1 est caractérisée par une impédance de 200 Ω et un retard par cellule de $1{,}2 . 10^{-9}$ s, alors que les grandeurs correspondantes sont 100 Ω et $6 . 10^{-9}$ s pour la ligne des grilles g_3. Primitivement les deux lignes étant

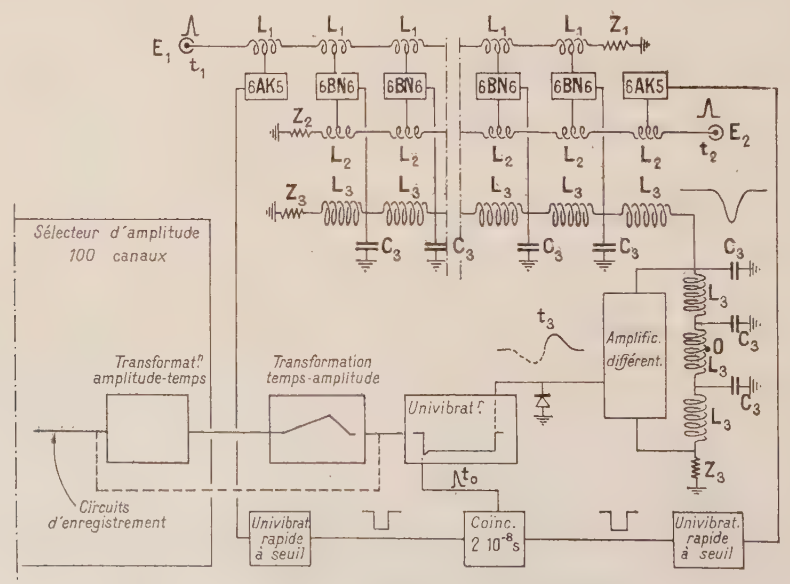


Fig. 2. — Schéma de principe du chronotron.

identiques mais lorsqu'on appliquait une impulsion sur les grilles g_1, il apparaissait par influence sur les grilles g_3 un résidu parasite qui augmentait d'une lampe à l'autre suivant le processus des amplificateurs distribués et finissait par perturber le fonctionnement de l'appareil.

En introduisant une différence appréciable entre les vitesses de propagation des deux lignes, l'effet d'amplificateur distribué est beaucoup moins important et le phénomène parasite fortement atténué.

Les impulsions de courant plaque, résultant d'une coïncidence servent à charge les capacités C_3 de 35 pF d'une ligne à grand retard dont les selfs L_3 ont une valeur de 2 mH et une capacité répartie de 2 pF. Pendant la durée relativement brève. ($\simeq 10^{-8}$ s) des impulsions de coïncidence, les selfs L_3 jouent le rôle de « selfs d'arrêt » et isolent les différents circuits plaques. Chaque capacité C_3 se trouve ainsi chargée sous une tension proportionnelle à l'amplitude de l'impulsion de coïncidence correspondante, et une impulsion très large ($\simeq 2\ 10^{-6}$ s) représentant l'enveloppe de ces différentes amplitudes, se trouve inscrite dans la ligne à grand retard. Elle se propage vers une extrémité 0, où l'instant d'arrivée t_3 de son maximum est déterminé avec précision, par un amplificateur différentiel. L'instant t_3 dépend de l'endroit de formation du maximum de l'impulsion-enveloppe et par suite du temps $t_2 - t_1$. Une variation de $1{,}8\ 10^{-9}$ s de $t_2 - t_1$ (passage de la coïncidence d'une lampe à la suivante) correspond à une variation de l'instant t_3 de $2{,}7\ 10^{-7}$ s (temps de parcours d'une cellule de la ligne à grand retard). On a donc réalisé une dilatation du temps dans un rapport 150.

On compare alors l'instant t_3 à l'instant t_0 défini de la façon suivante : à l'entrée de chaque ligne à faible retard, une lampe 6AK5 montée en cathode suiveuse envoie l'impulsion de commande vers un univibrateur rapide à seuil réglable. Les deux impulsions qui en résultent agissent sur un circuit de coïncidences dont le temps de résolution est $2\ 10^{-8}$ s. L'instant t_0 est déterminé par le front de montée de l'impulsion de coïncidence qui en résulte. Un univibrateur bascule à l'instant t_0 et revient à sa position de repos à l'instant t_3. On obtient alors une impulsion rectangulaire de durée $t_3 - t_0 = 150\ (t_2 - t_1)$.

Un circuit très simple de transformation temps-amplitude permet d'exploiter les résultats à l'aide

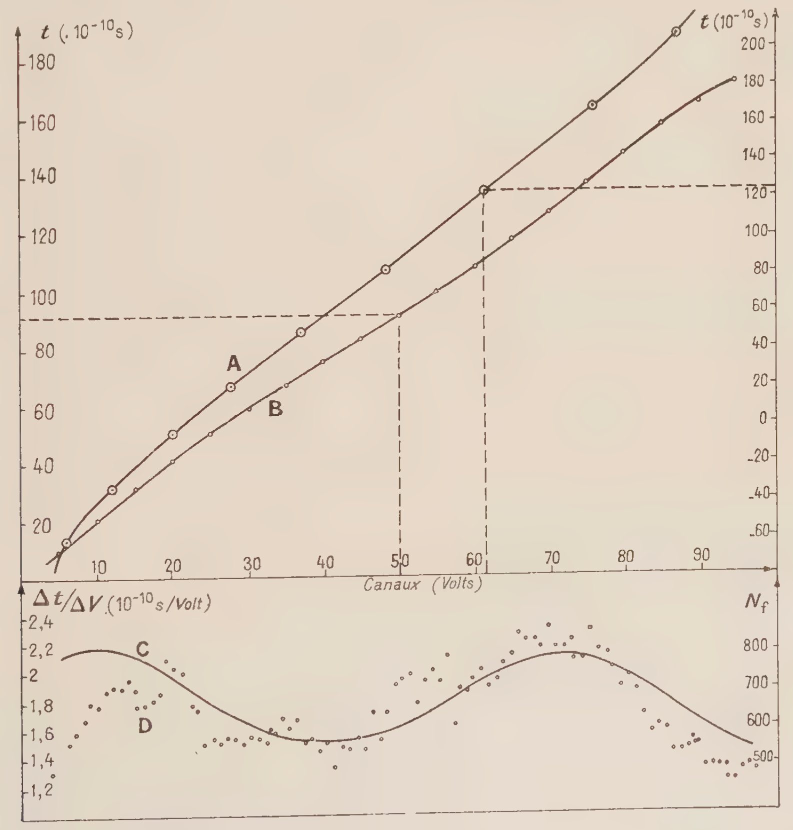


Fig. 3.

A : Courbe d'étalonnage pour une pente moyenne de $3\ 10^{-10}$ s/volt.
B : Courbe d'étalonnage pour une pente moyenne de $1{,}8\ 10^{-10}$ s/volt.
C : Variations de la pente de la courbe B.
D : Spectre de coïncidences fortuites.

d'un sélecteur d'amplitude multicanaux. Néanmoins, ce type de sélecteur comportant ordinairement à l'entrée un circuit de transformation amplitude-temps, il est possible de simplifier le montage en adaptant directement le chronotron aux circuits d'enregistrement du sélecteur d'amplitude. Pour cela, il suffit de modifier les caractéristiques de la ligne à grand retard, de telle sorte que la gamme de temps des circuits d'analyse du chronotron corresponde à celle du sélecteur d'amplitude.

III. **Étalonnage et performances du chronotron.** — L'étude du montage ci-dessus a fait apparaître un certain nombre d'anomalies dans le fonctionnement des lampes 6BN6 qui limitent les performances du chronotron. Nous avons signalé plus haut l'apparition d'un signal parasite sur les grilles g_3 lorsqu'on applique une impulsion sur les grilles g_1. La dissymétrie des lignes à faible retard limite l'amplification de ce signal dans le sens de parcours de la voie g_1. Néanmoins pour les grandes impulsions de cette voie le phénomène est suffisamment important pour libérer un courant plaque dans quelques lampes. Par suite il apparaît des signaux parasites dans les circuits lents et compte tenu du temps mort de ces circuits, le nombre d'impulsions dans la voie g_1 doit être limité à 10^4 par seconde environ. Les impulsions de la voie g_3, au contraire n'influencent que très faiblement les circuits lents et leur nombre peut dépasser 10^5 par seconde.

Par ailleurs, les lampes 6BN6 ne répondent pas de façon identique aux impulsions d'amplitude différente. Les courbes de coïncidences se déplacent de $5\ 10^{-10}$ s sur l'échelle des temps lorsque l'amplitude des impulsions de commande varie de 3 à 7 volts. Ce fait peut s'expliquer notamment par une variation de temps de transit entre les deux grilles de commande. Pour éviter une augmentation du temps de résolution par ce phénomène, on a limité l'amplitude des impulsions entre 3,5 et 7 volts.

Dans ces conditions, en effectuant des coïncidences γ-γ à partir d'une source de ^{60}Co, on a relevé une courbe de résolution dont la largeur à mi-hauteur est $7\ 10^{-10}$ s ; on a utilisé pour cela des photomultiplicateurs « Radiotechnique 56 AVP » sans amplificateurs, équipés de scintillateurs organiques (P. terphenyl + Popop dans polystyrène).

On a relevé la courbe d'étalonnage en utilisant un générateur d'impulsions brèves et une ligne à retard variable. En choisissant une largeur de canal de $3\ 10^{-10}$ s, la courbe est sensiblement linéaire entre les canaux 20 et 80. Les défauts de linéarité apparaissent plus nettement lorsqu'on diminue la largeur de canal à $1,8\ 10^{-10}$ s en ne conservant que la partie centrale de la courbe précédente. La largeur de canal se modifie en agissant sur le facteur de transformation temps-amplitude. En outre un seuil variable placé avant l'étage de sortie permet de déplacer l'échelle des amplitudes par rapport à l'échelle des temps. On a relevé également le spectre horizontal des coïncidences fortuites, en alimentant chacune des deux voies du chronotron par des impulsions aléatoires sans corrélation de temps. La courbe obtenue reproduit assez bien les variations de pente de la courbe d'étalonnage.

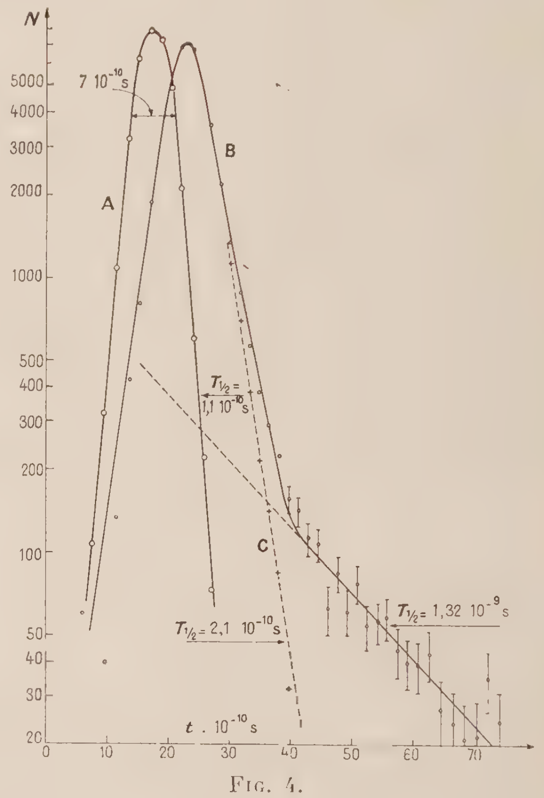


Fig. 4.

A : Courbe de coïncidences simultanées γ-γ obtenue à partir d'une source de ^{60}Co.

B : Courbe de coïncidences retardées entre les photons γ de 1,28 MeV de ^{22}Na et les photons γ de 0,511 MeV résultant de l'annihilation dans le téflon des positrons correspondants.

C : Courbe déduite de B en retranchant la période longue.

La position relative des courbes A et B sur la figure est arbitraire.

Il paraît difficile d'obtenir une très bonne linéarité. Celle-ci supposerait notamment pour les lampes 6BN6 des caractéristiques identiques. Or la présence de deux grilles de commande fait intervenir deux groupes de caractéristiques qui nécessitent une sélection minutieuse à partir d'un nombre élevé de tubes. Les 20 lampes utilisées pour tracer les courbes ci-dessus, ont été choisies dans un lot de 100. Malgré cela les caractéristiques varient dans des limites supérieures à $\pm$ 10 %.

Une courbe de coïncidences simultanées entre les photons γ de 1,28 MeV et les photons γ de 0,511 MeV obtenus par annihilation dans le téflon

des positrons correspondants, fait apparaître une période longue $T_{1/2} = (1{,}32 \pm 0{,}15)\ 10^{-9}$ s et une période courte $T_{1/2} = (2{,}1 \pm 0{,}5)\ 10^{-10}$ s. Pour établir cette courbe on a relevé d'abord le spectre complet des coïncidences N_c, puis le spectre des coïncidences fortuites, N_f, seules, en rejetant les coïncidences réelles en dehors de la gamme de temps étudiée par l'addition d'un retard supplémentaire dans l'une des voies. On a porté en abscisse pour chaque canal une valeur porportionnelle à

$$(N_c - N_f)/N_f.$$

En outre la position des canaux sur l'échelle des temps a été déterminée en tenant compte de la courbe d'étalonnage.

On a enfin effectué des coïncidences (n, α) à partir de la réaction (d, t) (*fig.* 1). La largeur à mi-hauteur de la courbe de résolution est de $2\ 10^{-9}$ s. L'augmentation du temps de résolution est due principalement à des fluctuations de parcours des α et des neutrons de la cible aux détecteurs. Néanmoins, dans ces conditions, il est possible de mesurer l'énergie de neutrons de 14 MeV avec une résolution de 10 % en prenant un parcours de deux mètres, l'efficacité restant suffisante.

IV. **Conclusion.** — Le chronotron ainsi réalisé remplit les conditions imposées au début de cette étude. Cependant sa mise au point serait facilitée et ses performances améliorées par l'emploi d'une lampe à coïncidences plus perfectionnée. Il serait souhaitable en particulier de réaliser, pour celle-ci, deux électrodes de commande parfaitement symétriques et n'ayant entre elles aucune interaction. Le but recherché est d'obtenir de cette façon un rejet total des signaux en l'absence de coïncidences et de réponses identiques aux signaux d'amplitude différente. En outre, afin de réaliser le repérage des impulsions par leur centre de gravité, il est nécessaire que le courant plaque soit proportionnel au produit des amplitudes instantanées des signaux appliqués sur les deux électrodes de commande, et cela dans une gamme aussi étendue que possible. Une telle lampe rendrait de grands services pour la mesure des temps de l'ordre de 10^{-10} s.

Je suis reconnaissant au C. N. R. S. de m'avoir permis d'effectuer cette étude qui a fait l'objet d'une thèse d'Ingénieur-Docteur (Duclos, 1958). Je remercie tout particulièrement M. le Pr Bouchez qui m'a sans relâche prodigué ses conseils. Je remercie également MM. Fleury et Van Zurk du C. E. N. G. pour les nombreuses suggestions qu'ils ont bien voulu m'apporter au cours de nos fréquentes discussions.

Manuscrit reçu le 16 novembre 1959.

RÉFÉRENCES

Cochram (B.), *Rev. Sc. Instr.*, 1955, **26**, 757.
Cottini (C.) et Gatti (E.), *Nuovo Cimento*, 1956, **4**, 1550.
Duclos (J.), *Thèse*, Grenoble, 1958, **101**.
Green (R. E.) et Bell (R. E.), *Canad. J. Phys.*, 1958, **36**, 1684.
Johnson (G. K.), *Rev. Sc. Instr.*, 1956, **27**, 468.
Jones (G.) et Warren (J. B.), *J. Sc. Instr.*, 1956, **33**, 429.
Keuffel (J. W.), *Rev. Sc. Instr.*, 1949, **20**, 197.
Lepri (F.), Mezzetti (L.) et Stoppini (G.), *Rev. Sc. Instr.*, 1955, **26**, 936.
Meunier (R.) et Davidson (G.), *Rev. Sc. Instr.*, 1957, **28**, 1010.
Neddermeyer (S. H.), Althans (E. J.), Allison (W.) et Schatz (E. R.), *Rev. Sc. Instr.*, 1947, **18**, 488.
Neilson (G. C.) et James (D. B.), *Rev. Sc. Instr.*, 1955, **26**, 1018.
O'Neill (G. K.), *Rev. Sc. Instr.*, 1955, **26**, 285.
Rémy (E.) et Winter (K.), *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 112 A ; *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 96.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

SUPPLÉMENT AU N° 3.
TOME 21, MARS 1960, PAGE 24 A.

INTRODUCTION A LA THÉORIE DU TECNETRON

Par A. V. J. MARTIN (*)

Résumé. — Le tecnetron est un dispositif amplificateur à semiconducteur. Il utilise la striction centripète due à l'effet de champ appliqué à une structure cylindrique. Son étude est divisée en deux parties. La première contient la théorie fondamentale approchée de base, d'où découlent les caractéristiques principales du tecnetron ainsi que quelques conclusions pratiques. La seconde étudie quelques effets secondaires et leur répercussion sur la théorie de base et sur la réalisation pratique du tecnetron.

Abstract. — The tecnetron is a semiconductor amplifying device. It uses the centripetal striction produced by the field effect in a cylindrical structure. Its analysis is divided into two parts. Part one establishes the approximative fundamental theory and deduces the principal characteristics of the device, as well as some practical conclusions. Part two deals with secondary effects and their bearing on the fundamental theory and the practical design of the device.

Introduction. — La variation apparente de résistance d'un semiconducteur par application d'un champ électrique, ou effet de champ, peut être mise à profit pour la réalisation d'éléments solides amplificateurs. Bien que l'effet de champ ait été connu depuis longtemps [1], ce n'est qu'au cours de ces dernières années que des recherches théoriques et expérimentales [2, 3, 4] ont attiré l'attention sur les intéressantes possibilités d'application dans le domaine des amplificateurs à semiconducteurs [5]. Nombre de variantes pratiques d'application du principe sont possibles et ont été proposées. Une géométrie qui semble intéressante est celle à symétrie de révolution, qui a fait l'objet de travaux, entre autres par les laboratoires du C. N. E. T. et S. Teszner sous le nom de tecnetron [6].

L'étude qui suit est le fruit partiel de recherches indépendamment conduites par l'auteur au cours des trois dernières années sur un dispositif identique. La dénomination de tecnetron a été adoptée au bénéfice de l'uniformité. L'étude a été divisée en deux parties.

La première, *Théorie approchée*, constitue une analyse théorique de base du tecnetron. Elle se compose essentiellement d'une adaptation d'une publication américaine antérieure de l'auteur (IRE Convention, 1958), quelque peu modifiée en accord avec certains résultats récents.

La deuxième, *Compléments théoriques*, étudie quelques effets secondaires ou à tout le moins non fondamentaux, ainsi que certaines variantes possibles du dispositif de base.

(*) Directeur de la Revue *Électronique et Automatisme*, 61, rue de Maubeuge, Paris (9e).

Ce travail a été effectué alors que l'auteur était Ass. Prof., E. E. Dpt, Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, U. S. A., avec financement partiel par la Marine américaine, Contrat O N R. Nonr 760 (09).

PREMIÈRE PARTIE

Théorie approchée

Caractéristiques physiques. — PRÉSENTATION. — Le tecnetron se présente sous l'aspect d'un bâtonnet cylindrique de semiconducteur dans lequel a été pratiquée une gorge profonde (*fig.* 1).

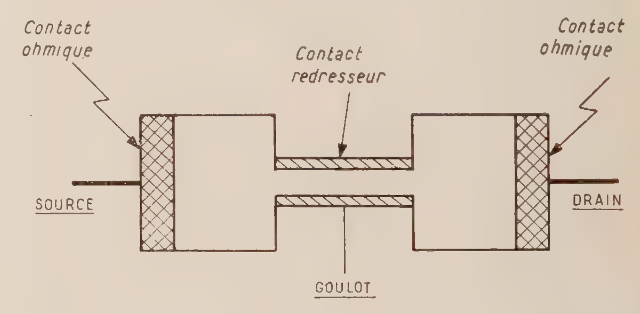


FIG. 1. — Aspect physique du tecnetron.

L'ensemble est très petit ; des dimensions représentatives seraient par exemple : longueur 1 mm, diamètre 0,5 mm, largeur de la gorge 0,1 mm, diamètre du filament central dans la gorge 0,1 mm. Actuellement, les bâtonnets sont extraits d'un monocristal de germanium du type N, et les porteurs de charge sont par conséquent des électrons. Le bâtonnet porte trois contacts. Deux sont purement ohmmiques et son appliqués aux extrémités. Le troisième est unidirectionnel et peut être indifféremment obtenu au moyen d'une jonction P-N ou d'un contact redresseur métal-semiconducteur, ce dernier procédé étant pratiquement utilisé avec de l'étain ou de l'indium. Le métal est déposé au fond

de la gorge du filament de semiconducteur et constitue une électrode annulaire.

La terminologie habituellement appliquée aux électrodes des tubes électroniques, si elle peut être adoptée dans le cas particulier considéré, est par contre incorrecte dans le cas général. En conséquence, l'électrode d'où proviennent les porteurs de charge a été baptisée la source, et l'électrode par laquelle ils sont évacués a été nommée le drain. Cette nomenclature est en accord avec l'usage anglo-saxon. La troisième électrode, ou électrode de contrôle, sera appelée le goulot selon un précédent établi et parce que le G rappelle à la fois le terme anglo-saxon de « gate » et le rôle de l'électrode, tout à fait comparable à celui de la grille d'un tube électronique ou, peut-être plus exactement, au wehnelt d'un tube cathodique.

Fonctionnement. — La source est prise comme origine des potentiels. En fonctionnement normal, le drain est porté à une tension positive de quelques dizaines de volts, et le goulot est polarisé négativement de quelques volts. Le contact métal-semiconducteur est donc contre-polarisé et présente une

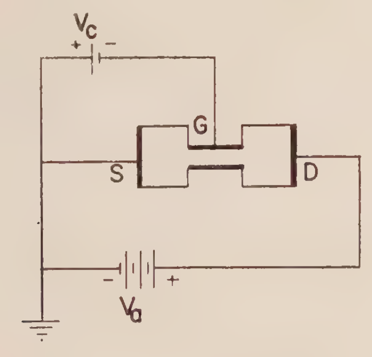


Fig. 2. — Tensions appliquées.

résistance élevée (*fig.* 2). Une région annulaire de charge d'espace, dépouillée de ses porteurs de charge mobiles, apparaît dans le semiconducteur sous-jacent au goulot. Cette région est isolante et ne conduit pas le courant. Il en résulte une réduction de la section droite de la partie conductrice du semiconducteur, donc une augmentation de sa résistance apparente. C'est l'effet de variation de résistance apparente précédemment mentionné. La partie conductrice centrale du semiconducteur est appelée le canal. Le problème du canal est compliqué du fait de la chute de tension axiale due au courant de drain. Cette chute de tension a pour résultat une tension goulot-drain qui varie en fonction de la position le long de l'axe.

Tecnetron idéal. — La seule partie active du tecnetron est la zone de faible diamètre. Les extrémités sont de forte section par raison de commodité pratique et pour réduire la résistance ohmmique entre les contacts de source et de drain et la partie active. Idéalement, le tecnetron serait constitué d'un mince filament de germanium, muni d'une électrode de goulot sur sa périphérie et de deux contacts ohmmiques sur ses faces terminales. Une telle structure idéalisée sera analysée avec les hypothèses suivantes. Le goulot est long et mince ; il n'y a pas de modulation de conductivité. La densité de porteurs de charge est constante. La résistance inverse de goulot est infinie. Les résistances ohmmiques de source et de drain sont nulles. L'effet de certaines de ces hypothèses, ainsi que de la géométrie réelle du tecnetron, sera discuté plus loin.

Le fonctionnement du tecnetron résulte de deux effets distincts, l'un dû à la tension de goulot, l'autre à la tension de drain. Ces deux processus seront d'abord analysés séparément, puis combinés pour obtenir les catactéristiques de transfert.

Circuit d'entrée. — Section droite apparente. — L'effet de la tension négative de goulot est de réduire la section droite apparente du canal, donc de diminuer la conductance drain-source. En l'absence de tension de drain, le canal est supposé cylindrique, les effets d'extrémité étant négligés. Pour une tension de goulot nulle, le canal occupe tout le semiconducteur, de rayon b et de longueur l

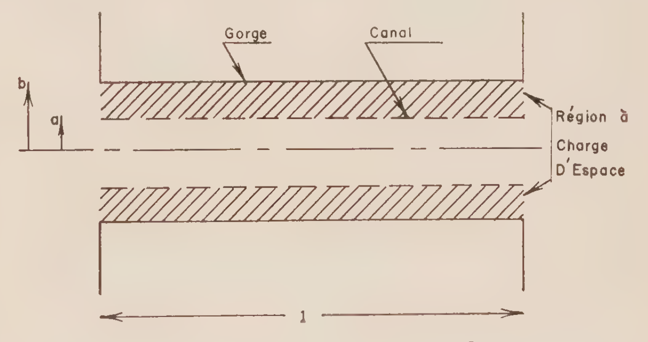


Fig. 3. — Géométrie du goulot.

(*fig.* 3). La résistance en l'absence de tensions, ou résistance à froid, est donc

$$R_0 = \frac{l}{G_0} = \frac{l}{\pi\sigma b^2}$$

ou σ est la conductivité du semiconducteur et G_0 la conductance à froid.

Une tension négative est maintenant appliquée au goulot. Soit a le rayon du canal résultant. L'équation de Poisson s'écrit en général

$$\nabla . E = \rho / \varepsilon$$

$$\nabla^2 V = - \rho / \varepsilon.$$

En coordonnées cylindriques

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Le terme en φ disparaît évidemment par raison de symétrie. Même ainsi, l'équation n'a de solution simple que si l'on suppose

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \ll \rho/\varepsilon$$

de sorte que le dernier terme aussi puisse être négligé. Alors, pour une variation lente ou graduelle le long de l'axe, on peut employer l'équation approximative

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = -\rho/\varepsilon.$$

Une solution est

$$V = -\rho r^2/4\varepsilon.$$

Soit

$$V = 0 \quad \text{et} \quad \partial V/\partial r = 0 \quad \text{pour} \quad r = a.$$

La tension de goulot est alors

$$V_g = -\frac{\rho}{4\varepsilon}\left(b^2 - a^2 - 2a^2 \log\frac{b}{a}\right).$$

Le terme logarithmique disparaît pour les valeurs limites de a, c'est-à-dire 0 et b. Le premier cas, ainsi qu'on va le voir, correspond à la coupure et s'applique en conséquence au calcul du paramètre statique fondamental, la tension de coupure.

Le paramètre dynamique important est la fréquence limite, qui dépend des capacités parasites. La capacité goulot-canal est maximum si a est presque égal à b, et le terme logarithmique peut alors être négligé. On verra plus loin que cela s'applique au moins à une partie du canal. De plus, près de la zone de striction maximum, a est très petit et le terme logarithmique peut encore être négligé. En conclusion, pour une bonne partie du canal le terme logarithmique est petit. On peut remarquer qu'il atteint sa valeur maximum pour $a = 0{,}6\,b$. Il semble qu'en vue de la simplification considérable des calculs, et en raison des résultats exacts ou suffisamment approchés obtenus pour les paramètres principaux, on puisse entièrement négliger le terme logarithmique. Cela a été fait dans cette analyse, qui n'est donc qu'approximative.

Évidemment, il s'agit là d'une décision quelque peu draconienne, et une analyse plus poussée ou plus précise devrait tenir compte de ce terme. Cependant, l'approximation faite n'est guère plus arbitraire ou importante que celle qui résulte de l'abandon du terme à variation axiale dans l'équation différentielle fondamentale, et que l'on est obligé de faire, même pour des géométries planes, si l'on veut résoudre l'équation de Poisson analytiquement.

Une étude semi-graphique, dans laquelle on tient compte du terme logarithmique, a été faite par l'auteur en collaboration avec J. Le Mée, également du Carnegie Institute of Technology, à Pittsburgh, U. S. A. Elle sera prochainement publiée.

La plus grosse erreur introduite en négligeant le terme logarithmique porte sur la valeur de la résistance totale du canal, dont le terme logarithmique modifie sensiblement la configuration, particulièrement dans la zone médiane. Le résultat pratique important est que la limite en fréquence est inférieure à celle que l'on obtient dans la présente étude, basée sur une équation de départ simplifiée. Néanmoins, les résultats qualitatifs, sinon quantitatifs, restent valables, principalement en ce qui concerne l'effet des divers paramètres physiques.

Comme la simplification apportée par l'abandon du terme logarithmique est importante, on a décidé d'en bénéficier dans cette première tentative de théorie approchée.

La tension de goulot sera donc simplement écrite

$$V_g = -\frac{\rho}{4\varepsilon}(b^2 - a^2)$$

d'où

$$a^2 = b^2 + \frac{4\varepsilon}{\rho} V_g \tag{2}$$

V_g ayant une valeur négative. Il en résulte que la section droite du canal est une fonction linéaire de la tension de goulot.

Conductance. — Soit G_c la conductance du canal.

Elle atteint sa valeur maximum G_0 à froid, c'est-à-dire en l'absence de tensions, où l'on a

$$a = b$$

de sorte que

$$\frac{G_c}{G_0} = \frac{a^2}{b^2} = 1 + \frac{4\varepsilon}{\rho\, b^2} V_g. \tag{3}$$

Cette expression montre que la conductance du canal est une fonction linéaire de la tension de goulot. De plus, la conductance nulle, ou coupure, se produit pour une tension

$$V_{c0} = -\frac{\rho\, b^2}{4\varepsilon}. \tag{4}$$

On peut donc écrire la conductance

$$G_c = \left(1 - \frac{V_g}{V_{c0}}\right) G_0. \tag{5}$$

Circuit de sortie. — Résistance du canal. — Le goulot est maintenant directement connecté à la source, de sorte qu'il n'y a pas de polarisation extérieure de goulot. Une tension positive V_a est appliquée au drain. Il en résulte un courant de drain qui crée au long du canal une chute de tension V_z

fonction de la distance axiale z, mesurée depuis l'extrémité source du canal.

Par suite, en tout point du canal, une tension

$$V_g = - V_z$$

existe entre le canal et le goulot, et cette tension augmente en valeur absolue de la source vers le drain. Le résultat est une diminution progressive de la section droite du canal, dont le rayon a est fonction de z.

En tout point cependant les équations (3) et (5) s'appliquent, R_c et V_g étant maintenant fonctions de z. On a donc

$$\frac{\partial R_c}{\partial z} = \frac{R_0/l}{1 + (V_z/V_{c0})}.$$

Puisque le courant est constant dans le canal

$$\partial V_z = \dot{I} \partial R_c$$

et en portant dans l'équation précédente

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\dot{I} R_0}{l[1 + (V_z/V_{c0})]}$$

dont la solution est

$$V_z = - V_{c0} + \left(V_{c0}^2 + 2\dot{I} R_0 \, V_{c0} \frac{z}{l} \right)^{1/2}.$$

La tension maximum se produit à l'extrémité drain, pour laquelle

$$z = l$$

et elle est égale à la tension de drain. Il en résulte

$$V_a = - V_{c0} + (V_{c0}^2 + 2\dot{I} R_0 \, V_{c0})^{1/2} \tag{7}$$

où V_a est la tension de drain.

La limite de validité est

$$V_a = - V_{c0}$$

pour laquelle

$$\dot{I}_{\max} = - \frac{V_{c0}}{2R_0} = \frac{V_a}{2R_0}. \tag{8}$$

Par conséquent, la résistance du canal est égale à deux fois la résistance à froid pour une tension de drain égale à la tension de coupure.

Au delà de cette valeur, une augmentation de la tension de drain produit une augmentation importante de la résistance du canal, de sorte que la plus grande partie de la chute de tension se produit aux bornes de la zone étroite du canal et que le courant se maintient virtuellement à la valeur de saturation ci-dessus. C'est là l'effet d'étranglement.

Variation de courant. — L'expression (7) peut être résolue pour le courant dans la zone où il varie et donne

$$\dot{I} = \frac{V_a}{R_0} + \frac{V_a^2}{2R_0 \, V_{c0}}. \tag{9}$$

Le premier terme est linéaire et donne le courant ohmmique qui circulerait à travers une résistance égale à la résistance à froid R_0, pour la même tension de drain. Le second terme est parabolique et négatif, puisque V_{c0} est négatif ; il donne la réduction de courant due à l'effet d'étranglement.

En différentiant (9)

$$\frac{1}{r_a} = \frac{\mathrm{d}\dot{I}}{\mathrm{d}V_a} = \frac{1}{R_0} [1 + (V_a/V_{c0})] \tag{10}$$

avec

$$0 > V_a/V_{c0} > -1.$$

Il est à remarquer que la pente $\mathrm{d}I/\mathrm{d}V_a$ s'annule pour la tension d'étranglement

$$V_a = - V_{c0}.$$

Une représentation graphique de (9), y inclus le

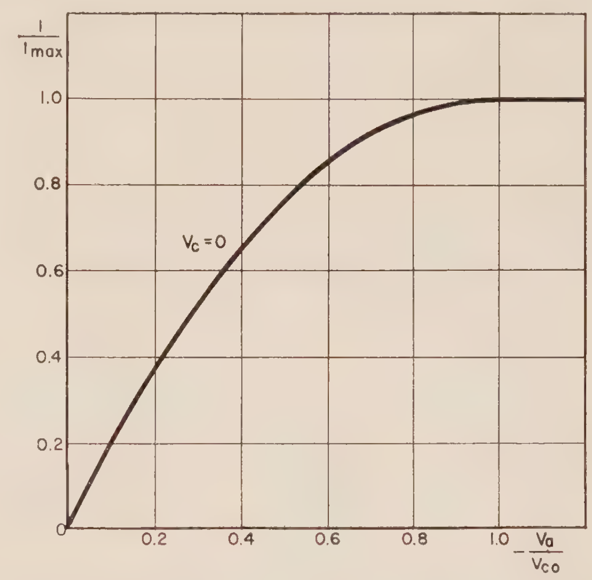


Fig. 4. — Variation du courant en fonction de la tension de drain pour une polarisation de goulot nulle.

début de la zone de saturation, est donnée figure 4 en coordonnées normalisées.

Caractéristiques de transfert. — Courant de drain. — Il reste maintenant à combiner les effets des tensions de goulot et de drain.

Comme on l'a vu, l'effet de la tension de goulot seule est une réduction du diamètre du canal, qui demeure cylindrique. La tension de goulot, si elle est suffisamment négative, peut provoquer la fermeture totale du canal, c'est-à-dire la coupure.

L'effet de la tension de drain est une réduction progressive du diamètre du canal le long de l'axe, jusqu'à ce que l'étranglement se produise à l'extrémité drain. A l'étranglement et au delà, le courant atteint sa valeur de saturation mais ne s'annule pas.

La superposition des deux effets est obtenue en écrivant que la tension de goulot V_g en tout point est la somme de la polarisation de goulot V_c et de la chute de tension axiale — V due au courant de drain

$$V_g = V_c - V_z.$$

L'équation (7) devient

$$V_a = -(V_{c0} - V_c) + [(V_{c0} - V_c)^2 + 2\dot{I}R_0 V_{c0}]^{1/2}. \quad (11)$$

L'étranglement se produit maintenant pour

$$V_a = V_c - V_{c0}$$

ce qui donne

$$\dot{I}_{\max} = \frac{-(V_{c0} - V_c)^2}{2R_0 V_{c0}} = \frac{V_a^2}{2R_0 V_{c0}}.$$

Cette expression montre que les points pour lesquels le courant de drain atteint la saturation sont répartis sur une parabole dans la famille de caractéristiques $\dot{I} = f(V_a)$.

On peut résoudre (11) pour le courant

$$\dot{I} = V_a \frac{V_{c0} - V_c}{R_0 V_{c0}} + \frac{V_a^2}{2R_0 V_{c0}}. \quad (12)$$

Une représentation graphique de cette équation est donnée figure 5 pour différentes valeurs de V_c,

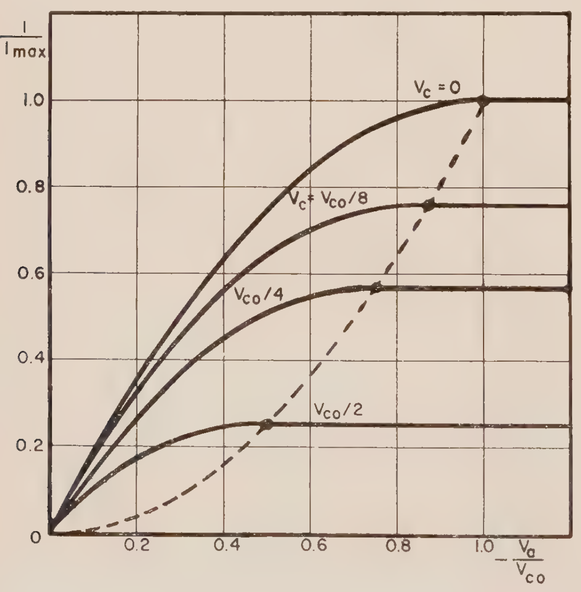


Fig. 5. — Variation du courant en fonction de la tension de drain pour différentes tensions de polarisation.

avec les mêmes coordonnées normalisées que précédemment. On remarquera que le courant de drain est une fonction linéaire de la tension de goulot V_c.

Par comparaison avec (9), il est évident que

$$R_c = R_0 V_{c0}/(V_{c0} - V_c)$$

représente la résistance accrue de canal due à la tension de goulot, de sorte que

$$\dot{I} = \frac{V_a}{R_c} + \frac{V_a^2}{2R_0 V_{c0}} \quad (13)$$

montre encore que le premier terme linéaire correspond au courant ohmique et le second terme parabolique correspond à la réduction de courant due à l'effet d'étranglement.

Conductances de drain et de transfert. — La différentiation de (12) par rapport à V_a pour V_c constant procure

$$\frac{\partial \dot{I}}{\partial V_a} = \frac{1}{R_0 C_{c0}} (V_a + V_{c0} - V_c). \quad (14)$$

Cette pente s'annule pour la tension d'étranglement

$$V_a = V_c - V_{c0}$$

la résistance en alternatif du canal devenant infinie.

Outre la possibilité de régulation de courant continu, le phénomène ouvre donc des perspectives dans le domaine de l'élimination de composantes alternatives. On peut aussi différentier (12) par rapport à V_c pour V_a constant afin d'obtenir la conductance de transfert

$$g_m = \frac{\partial \dot{I}}{\partial V_c} = -\frac{V_a}{R_0 V_{c0}} = -G_0 \frac{V_a}{V_{c0}} \quad (15)$$

qui atteint évidemment sa valeur maximum

$$g_m = G_0 \quad (16)$$

pour la valeur maximum de V_a soit

$$V_a = -V_{c0}.$$

Cela se produit à l'étranglement pour une tension de goulot nulle.

Choix du point de fonctionnement. — La conclusion qui précède indique que le meilleur point de fonctionnement, au moins en ce qui concerne la pente maximum, est obtenu par une tension de goulot juste suffisante pour maintenir le goulot négatif pour l'amplitude maximum du signal d'entrée, et par une tension de drain juste au-dessous de la tension d'étranglement. Avec une bonne approximation, on peut écrire dans ce cas

$$V_a = -V_{c0} \quad \text{et} \quad V_c = 0$$

d'où il résulte

$$\dot{I} = -\frac{V_{c0}}{2R_0} \quad \text{et} \quad g_m = G_0.$$

Ces conditions de fonctionnement s'appliqueront à la majeure partie de l'analyse qui suit.

L'expression (6) peut être transformée pour donner directement le rayon du canal en fonction

de la distance axiale z mesurée depuis l'extrémité source :

$$a_z^4 = b^4[1 - (z/l)]. \quad (17)$$

Au même point, la tension est donnée par

$$V_z = V_a\left[1 - \left(1 - \frac{z}{l}\right)^{1/2}\right]. \quad (18)$$

Capacitances et limites en fréquence. — Charge totale. — Le volume total occupé par la charge d'espace est

$$\int_0^l \pi(b^2 - a^2)\,dz$$

et la charge totale est

$$Q = \rho\pi\int_0^l (b^2 - a^2)\,dz.$$

L'équation (2) peut s'écrire

$$a_z^2 = b^2 + \frac{4\varepsilon}{\rho}(V_c - V_z)$$

où V_c est la tension de polarisation négative entre le goulot et la source, et $-V_z$ la chute de tension axiale, due à la tension de drain, entre la source et le point considéré, à une distance z de la source. On en déduit

$$Q = 4\pi\varepsilon\int_0^l V_z\,dz - 4\pi\varepsilon\int_0^l V_c\,dz.$$

Capacitances d'entrée et de sortie. — Dans le cas général où des tensions sont appliquées au goulot et au drain, l'équation (11) s'applique. On peut l'écrire, à l'aide de (12) :

$$V_z = -(V_{c0} - V_c) + \left[(V_{c0} - V_c)^2 + \frac{z}{l}\{V_a^2 + 2V_a(V_{c0} - V_c)\}\right]^{1/2}.$$

Si l'on pose

$$V_p = V_{c0} - V_c$$

pour alléger l'écriture, la charge est donnée par

$$Q = -4\pi\varepsilon l V_c - 4\pi\varepsilon\int_0^l V_p\,dz + 4\pi\varepsilon\int_0^l\left[V_p^2 + \frac{z}{l}(V_a^2 + 2V_a V_p)\right]^{1/2}dz.$$

En intégrant

$$Q = 4\pi\varepsilon\left[-lV_{c0} + \frac{2l}{3(V_a^2 + 2V_a V_p)}\{(V_a + V_p)^3 - V_p^3\}\right].$$

On peut différentier cette expression par rapport à V_p

$$\frac{\partial Q}{\partial V_p} = \frac{8\pi\varepsilon l}{3}\,\frac{V_a^2 + 6V_a V_p + 6V_p^2}{(V_a + 2V_p)^2}.$$

A l'étranglement

$$V_a = -V_p = V_c - V_{c0}$$

et la capacitance d'entrée est

$$C_i = \partial Q/\partial V_c = 8\pi\varepsilon l/3. \quad (19)$$

De même la capacitance de sortie est

$$C_0 = C_i = 8\pi\varepsilon l/3. \quad (20)$$

Limites en fréquence. — La capacité d'entrée a l'effet habituel : elle limite la réponse en fréquence. La constante de temps qui lui est associée fixe une limite à la vitesse avec laquelle la tension peut varier aux bornes de la capacité.

De plus, la tension de drain et la longueur du goulot déterminent le temps de transit. Ce problème peut être compliqué par le fait que la mobilité des porteurs de charge n'est plus indépendante de l'intensité du champ électrique au-dessus d'une valeur déterminée.

Constante de temps a l'entrée. — Pour une tension de goulot nulle, la tension V_z entre la source et un point à la distance axiale z est donnée par (6). Comme le courant est constant dans le canal

$$R_z = V_z/\dot{I}$$

est la résistance du canal entre la source et le point z. Sa valeur moyenne est donnée par

$$R_m = \frac{1}{l\dot{I}}\int_0^l\left[-V_{c0} + \left(V_{c0}^2 + 2\dot{I}R_0 V_{c0}\frac{z}{l}\right)^{1/2}\right]dz.$$

En intégrant

$$R_m = \frac{1}{l\dot{I}}\left[-lV_{c0} + \frac{l}{3\dot{I}R_0 V_{c0}}(V_{c0}^2 + 2\dot{I}R_0 V_{c0})^{3/2} - \frac{lV_{c0}^2}{3\dot{I}R_0}\right]$$

A l'étranglement, l'équation (6) donne

$$\dot{I} = -V_{c0}/2R_0$$

de sorte que

$$R_m = 2R_0/3.$$

La constante de temps d'entrée est

$$T = R_m C_i = (16/9)\,\pi\varepsilon l R_0$$

que l'on peut écrire

$$T = 16\varepsilon l^2/9\sigma b^2.$$

Il en résulte une limite en fréquence

$$F = 1/2\pi T = 9\sigma b^2/32\pi\varepsilon l^2. \quad (21)$$

Temps de transit. — Le temps de transit τ au long du goulot dépend de la vitesse v des porteurs de charge et de la longueur l du goulot

$$\tau = l/v.$$

La vitesse est donnée par

$$v = -\mu E$$

où E est l'intensité du champ électrique et μ la mobilité. Puisque

$$\mu = \sigma/\rho \quad (22)$$

et que

$$E = -V_a/l$$

on en tire

$$\tau = \rho l^2/\sigma V_a$$

et en remplaçant V_a par sa valeur

$$\tau = 4\varepsilon l^2/\sigma b^2. \qquad (23)$$

La limite de fréquence correspondante peut être fixée à une demi-période, d'où il résulte

$$F = \sigma b^2/8\varepsilon l^2. \qquad (24)$$

Cependant, ce résultat n'est valide que pour une mobilité constante, c'est-à-dire pour des champs de valeur inférieure à 10^3 V/cm sensiblement. Pratiquement, cette limite sera atteinte pour des valeurs faibles de la tension de drain. Au delà, une augmentation de la tension de drain ne résulte qu'en un accroissement réduit de la vitesse. Cela indique toutefois qu'il est bon sous ce rapport également d'utiliser la tension de drain maximum, c'est-à-dire la tension d'étranglement.

Si l'on continue à accroître la tension de drain, la vitesse des porteurs atteint une valeur maximum limite approximativement égale à 6×10^6 cm/sec. La limite de fréquence absolue correspondante est alors simplement

$$F = 3/l \qquad (25)$$

où F est en MHz et l en cm.

Il s'avère que, pour les valeurs pratiques des paramètres que l'on peut atteindre en l'état actuel de la technique, la limitation due au temps de transit intervient bien avant la limitation due à la constante de temps.

Effet des paramètres. — Récapitulation. — Au point de fonctionnement préférentiel, pour une tension de goulot nulle et une tension de drain égale à la tension d'étranglement, les principaux résultats obtenus sont rappelés ici :

$$V_a = (\rho/4\varepsilon)\, b^2$$

$$\dot{I}_a = V_a/2R_0 = (\pi\rho\sigma/8\varepsilon)\, b^3(b/l)$$

$$g_m = G_0 = \pi\sigma b(b/l)$$

$$C_i = C_0 = (8/3)\,\pi\varepsilon l$$

$$F = (9\sigma/32\pi\varepsilon)\,(b/l)^2$$

$$P = (\pi\sigma\rho^2/32\varepsilon^2)\, b^5(b/l).$$

La dernière équation exprime la puissance en continu, obtenue en multipliant la tension de drain par le courant de drain.

Ces expressions ont été écrites de façon à mettre en évidence l'effet des dimensions du goulot.

Si l'on augmente le rapport b/l du rayon du goulot à sa longueur, on accroît la limite de fréquence et la pente, mais aussi le courant de drain et la puissance.

Si l'on augmente la conductivité σ, et puisque

$$\sigma = \mu\rho$$

on augmente la limite de fréquence et la pente, mais aussi la tension de drain et le courant, d'où il résulte un accroissement rapide de la puissance. L'importance des deux premiers facteurs justifie au moins partiellement l'emploi d'un semiconducteur de haute conductivité.

Pour un rapport b/l fixe, une augmentation de b et l se traduit par un accroissement de la pente, des capacités parasites, de la tension de drain et du courant de drain, ces deux derniers effets résultant en une augmentation très rapide de la puissance.

Comme la majeure partie de la puissance est dissipée dans la courte zone d'étranglement, il est évident que le problème de l'évacuation de la chaleur occupe une place prépondérante. En fait, c'est là probablement le facteur qui limite l'amélioration de performances que l'on peut espérer par un ajustement des dimensions du goulot.

Valeurs représentatives. — Pour un choix pratique de paramètres représenté par les valeurs suivantes

$$b = 25 \times 10^{-1} \text{ cm}$$

$$l = 50 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

$$\sigma = 0{,}2 \text{ ohm}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

$$\varepsilon = 1{,}42 \times 10^{-12} \text{ F.cm}^{-1}$$

$$\rho = 0{,}555 \times 10^{-2} \text{ coul.cm}^{-3}$$

on obtient

$$V_a = 61 \text{ V}$$

$$R_0 = 1\,272\ \Omega$$

$$\dot{I}_a = 24 \text{ mA}$$

$$g_m = 0{,}78 \text{ mA/V}$$

$$C_i = C_0 = 0{,}0596\ \mu\mu\text{F}.$$

La limite en fréquence due à la capacitance d'entrée est au-dessus de 3 000 MHz, et la limite de fréquence due au temps de transit à vélocité maximum est

$$F = 600 \text{ MHz}.$$

Avec les valeurs ci-dessus, il se trouve que la tension de drain nécessaire résulte en une intensité de champ électrique bien supérieure à la valeur critique. Il est donc justifié d'utiliser la limite de fréquence indiquée.

Cette remarque souligne de même l'intérêt qu'il y a à se pencher de plus près sur ce qui se passe au delà de la valeur critique. Cela, toutefois, fait partie des considérations auxiliaires qui seront abordées dans la deuxième partie de cette étude.

DEUXIÈME PARTIE

Compléments théoriques

Mobilité variable. — Il s'avère que dans l'état actuel de la technique le tecnetron fonctionnera en bonne part avec un champ hypercritique, c'est-à-dire dépassant la limite critique de 10^3 V/cm environ, au delà de laquelle la mobilité n'est plus constante, mais décroît quand le champ augmente.

Il est possible de traiter le problème du tecnetron dans ce cas en suivant les mêmes lignes que pour le calcul à mobilité constante. L'intérêt de ce travail est réduit, car l'on est obligé de poser en hypothèse une loi de variation de la mobilité. Néanmoins, il est incontestable que des résultats même qualitatifs sont intéressants car ils indiquent dans quelle direction jouent les paramètres. On peut obtenir simplement ces résultats de la façon suivante. En première approximation, soit

$$\mu_n = k\mu_0 \quad \text{avec} \quad k = (E_c/E)^{1/2} \tag{26}$$

où μ_n est la mobilité pour un champ E, et μ_0 la mobilité (constante) au-dessous de la valeur critique E_c.

On a alors avec les mêmes notations

$$\sigma_n = k\sigma_0. \tag{27}$$

Le fonctionnement en zone hypercritique est obtenu par une augmentation de V_a, donc de b^2, qui se réfléchit dans les paramètres. Compte tenu de cette remarque, on peut substituer les valeurs ci-dessus dans les expressions, et l'on obtient les coefficients de proportionnalité suivants :

$$I_a \sim 1/k^2$$

$$g_m \sim 1/k$$

$$F \sim 1/k$$

$$P \sim 1/k^4.$$

Comme k est plus petit que 1, on voit immédiatement l'avantage pour la pente et la limite de fréquence à employer le k le plus petit possible, donc la tension de drain maximum. Toutefois, l'augmentation de puissance est très rapide et constitue le facteur qui limite les améliorations dans cette direction.

On peut conclure que, dans le cas du fonctionnement hypercritique comme dans le cas du fonctionnement normal, le meilleur point de fonctionnement est obtenu pour zéro volt de polarisation de goulot et une tension de drain égale à la tension d'étranglement, sous réserve des limitations en puissance.

Il est intéressant de signaler que, si l'on accroît indéfiniment le champ électrique, la vitesse des porteurs de charge est asymptotique à la valeur maximum de 6×10^6 cm sec^{-1} environ. Cette vitesse n'est que deux fois supérieure à la vitesse obtenue pour le champ critique. En conséquence, le fonctionnement en régime hypercritique apportera au maximum une amélioration de deux fois dans les performances en fréquence, et cela au prix d'une augmentation importante de consommation et de puissance dissipée. Ce problème fait l'objet d'une étude qui sera publiée prochainement.

Cependant, d'autres considérations entrent en jeu, ainsi que l'évaluation de la tension critique va le montrer.

Tension critique. — L'intensité du champ axial croît rapidement dans la zone d'étranglement. Il est difficile de définir directement un critère pour déterminer la valeur critique de la tension de drain. On peut attaquer le problème en considérant le gradient de tension dans le canal dVz/dz. On a

$$V_z = V_a\left[1 - \left(1 - \frac{z}{l}\right)^{1/2}\right]$$

où V_a est la tension de drain. Par suite

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{V_a}{2[l(l-z)]^{1/2}}.$$

Si l'on définit le gradient moyen par

$$E_m = V_a/l$$

on peut écrire le gradient en z

$$E_z = E_m\left[\frac{l}{4(l-z)}\right]^{1/2}. \tag{28}$$

Pour

$$E_z = E_m$$

par exemple, l'équation précédente a pour solution

$$z = (3/4)\, l.$$

On voit que le champ dans le canal sera supérieur au champ moyen seulement dans le dernier quart du canal, du côté drain. On peut de même montrer que le champ excèdera dix fois la valeur moyenne dans les derniers 0,25 % du canal seulement. Compte tenu de la réduction progressive de mobilité des porteurs de charge, il peut sembler raisonnable d'adapter une tension de drain telle qu'on obtienne un champ moyen égal à la valeur critique. Cela conduit à

$$V_a = 10^3\, l \tag{29}$$

où V_a est en volts et l en cm. Pour les valeurs usuelles de l, cette expression donne des valeurs plutôt faibles pour V_a. Comme cette tension doit être la tension d'étranglement, il peut fort bien en résulter des valeurs inacceptables des paramètres. On est donc bien obligé d'employer des tensions de drain plus élevées, de sorte que le champ devient hypercritique dans une bonne partie du canal.

Résistances ohmiques. — Les contacts de source et de drain ne sont pas faits directement aux extrémités du canal. Il en résulte deux résistances ohmiques indésirables. La géométrie du tecnetron est telle que leurs valeurs sont faibles vis-à-vis de la résistance du canal. Néanmoins, il est bon d'en envisager les effets. La résistance ohmique du contact de drain R_D provoque une perte de tension $R_D I_A$ que l'on peut aisément compenser. Il en résulte quand même un accroissement indésirable de la puissance dissipée par le tecnetron. Par ailleurs, R_D devient part de la résistance de charge, et le signal à ses bornes est perdu pour le circuit de sortie.

La résistance ohmique de source R_S a les mêmes effets en ce qui concerne la chute de tension en continu et la puissance dissipée. Incidemment, cette chute de tension peut être mise à profit pour fournir partiellement ou en totalité la polarisation de goulot. Le point important cependant est que cette résistance introduit une contre-réaction d'intensité avec deux résultats principaux. La pente est réduite dans la proportion

$$1 + g_m R_s \qquad (30)$$

et la fréquence limite capacitive est divisée par le facteur

$$1 + \frac{3}{4}\frac{R_s}{R_0}. \qquad (31)$$

On voit que ces deux effets ne sont pas très importants pour les valeurs usuelles des paramètres.

Courant de goulot. — La jonction ou le contact qui constitue le goulot est contre-polarisée. Le courant inverse qui circule peut être calculé à l'aide des équations classiques des jonctions. On peut l'évaluer simplement comme suit pour obtenir une indication approximative. La surface du goulot est

$$S = 2\pi\, bl.$$

Si la densité de courant inverse est J, le courant inverse total sera

$$\dot{I}_i = 2\pi\, bl\dot{J}. \qquad (32)$$

Si l'on admet une valeur typique pour la densité de courant inverse

$$\dot{J} = 10^{-3}\ \text{A cm}^{-2}$$

le courant de goulot devient

$$\dot{I}_i = 2\pi bl \times 10^3\ \mu\text{A} \qquad (33)$$

avec b et l en cm.

Par exemple, pour les valeurs précédemment indiquées pour b et l, soit 25 et 50 microns, on obtient

$$\dot{I}_i = 0{,}08\ \mu\text{A}.$$

Effet pelliculaire. — En raison du faible diamètre du canal, on peut se demander à bon droit si l'effet pelliculaire n'entre pas en jeu aux fréquences élevées de fonctionnement. L'analyse qui suit répond à cette question. La théorie classique de l'effet pelliculaire, appliquée à un conducteur cylindrique long, mince, et rectiligne, donne une solution exacte pour la distribution du courant dans la section du conducteur :

$$i = \frac{jm\dot{I}}{2\pi a}\,\frac{Ber(mr) + jBei(mr)}{Ber'(ma) + jBei'(ma)} \qquad (34)$$

avec

$m = (2\pi f\mu\sigma)^{1/2}$,
I = courant total,
i = densité de courant pour le rayon r,
a = rayon du conducteur,
μ = permittivité,
σ = conductivité,
f = fréquence.

Les fonctions Ber et Bei sont données par les tables classiques et l'on peut donc sans difficulté résoudre pour les valeurs numériques. En raison de l'allure de la variation de ces fonctions, il se trouve que pour

$$ma < 2$$

l'effet pelliculaire est pratiquement négligeable ainsi qu'on peut le voir en résolvant la distribution du courant.

Dans le cas du germanium, soit par exemple

$$\sigma = 500\ \text{ohm}^{-1}\ \text{m}^{-1}.$$

La valeur de m est alors

$$m = 2\pi \times 10^{-2} f^{1/2}$$

que l'on peut écrire

$$f = \frac{10^3\, m^2}{4}$$

ou encore

$$(ma)^2 = 4fa^2/10^3. \qquad (35)$$

En introduisant la valeur limite pour l'effet pelliculaire

$$ma = 2$$

on obtient

$$f = 10^3/a^2. \qquad (36)$$

Il est aisé de voir que toute valeur admissible pour a conduit à des fréquences bien supérieures aux fréquences atteintes par le tecnetron. On peut donc conclure que l'effet pelliculaire est négligeable pour les tecnetrons courants dans leur gamme de fonctionnement. Cette conclusion ne dépend pas de la conductivité du germanium utilisé, en raison de la gamme relativement étroite des conductivités disponibles, mais découle du fait que la conductivité est toujours relativement faible, par rapport à un métal par exemple.

Tecnetron tétrode. — En raison de la distribution de résistance et de capacité au long du canal, il peut sembler attrayant de scinder en deux l'électrode de goulot afin de réduire la constante de temps d'entrée et d'accroître la limite de fréquence correspondante. On obtient ainsi le tecnetron tétrode, ou plus exactement bigrille, dans lequel la première électrode de goulot ne reçoit qu'une tension continue (qui peut être nulle) et a pour but de

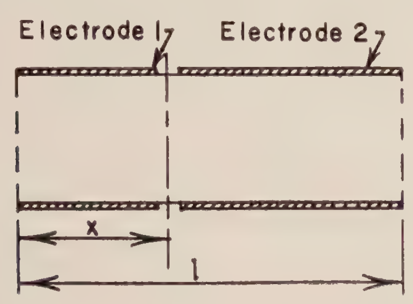


Fig. 6. — Géométrie du goulot pour un tecnetron tétrode.

créer une pré-striction du canal (*fig.* 6). La deuxième électrode de goulot reçoit en plus le signal d'entrée.

Toutefois, la capacité linéique étant constante, la réduction de capacité est proportionnelle à la réduction de longueur de l'électrode H. F. D'un autre côté, la valeur moyenne de la résistance augmente lorsque l'on réduit la longueur de l'électrode H. F. Les deux effets jouent en sens contraire, et il faut avoir recours à l'analyse mathématique pour préciser ces considérations qualitatives.

Soit x la longueur de l'électrode de pré-striction, analogue à la grille de champ d'une lampe bigrille. L'électrode signal a donc une longueur $(l - x)$. La valeur de la tension entre l'extrémité source du canal et un point d'abscisse quelconque z est donnée par l'équation (18) précédemment calculée et rappelée ici :

$$V_z = V_a\left[1 - \left(1 - \frac{z}{l}\right)^{1/2}\right].$$

Le courant étant constant dans le canal, la résistance du canal jusqu'au point z est

$$R_z = V_r / I.$$

A l'étranglement

$$V_a = -V_{c0} \quad \text{et} \quad I = V_a / 2R_0$$

de sorte que

$$R_z = 2R_0\left[1 - \left(1 - \frac{z}{l}\right)^{1/2}\right]. \qquad (37)$$

La valeur moyenne de la résistance pour l'électrode signal est

$$R_m = \frac{1}{l - x}\int_x^l 2R_0\left[1 - \left(1 - \frac{z}{l}\right)^{1/2}\right] dz.$$

En intégrant

$$R_m = 2R_0\left[1 - \frac{2}{3l^{1/2}}(l - x)^{1/2}\right]. \qquad (38)$$

Pour $x = 0$, on retrouve bien la valeur moyenne pour la totalité du goulot

$$R_{mt} = (2/3)\, R_0.$$

Pour toute autre valeur de x, la résistance moyenne est augmentée dans la proportion

$$\frac{R_m}{R_{mt}} = 3\left[1 - \frac{2}{3l^{1/2}}(l - x)^{1/2}\right].$$

Par ailleurs, la capacitance est multipliée par

$$(l - x)/l.$$

On en conclut que la constante de temps T_m associée à l'électrode signal est liée à la constante de temps T_t associée à la totalité du goulot par la relation

$$\frac{T_m}{T_t} = 3\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left[1 - \frac{2}{3l^{1/2}}(l - x)^{1/2}\right]. \qquad (39)$$

Cette expression a été représentée graphiquement figure 7. Une réduction de deux fois pour la cons-

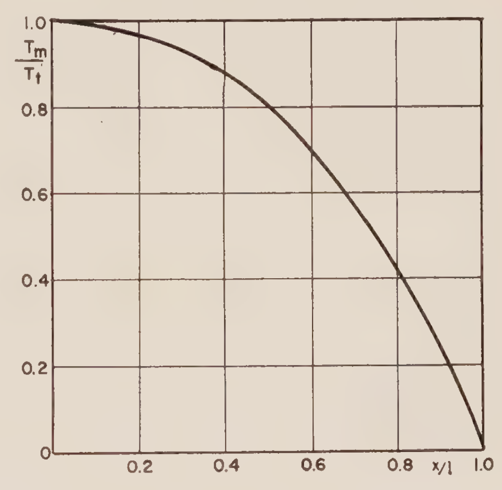


Fig. 7. — Amélioration de la constante de temps pour un tecnetron tétrode en fonction de la longueur de l'électrode de préstriction.

tante de temps est obtenue lorsque l'électrode signal n'occupe que le quart de la longueur du goulot.

Cette analyse simplifiée ne tient pas compte des effets de bord, qui deviennent importants dès que l'électrode n'a plus une longueur grande comparée à son diamètre, ni du couplage inter-électrodes.

Variation au long du canal. — L'expression (17), rappelée ici

$$a_z^4 = b^4\left[1 - \left(\frac{z}{l}\right)\right]$$

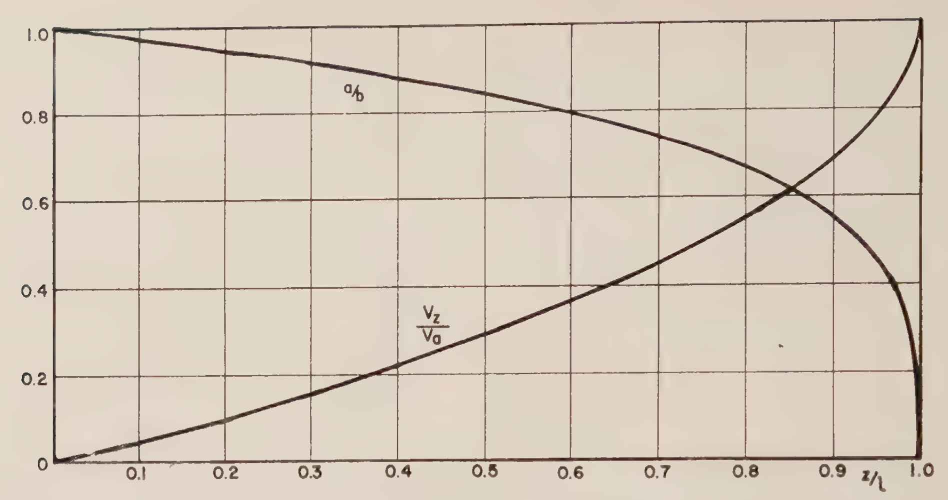


FIG. 8. — Variation du rayon et du potentiel au long du canal.

permet de tracer la variation du rayon du canal en fonction de la distance axiale z. Cela a été fait figure 8 en coordonnées normalisées. De même, l'expression (18) :

$$V_z = V_a\left[1 - \left(1 - \frac{z}{l}\right)^{1/2}\right]$$

a été représentée graphiquement sur le même diagramme. Les deux courbes sont évidemment des paraboles du second et du quatrième degré.

Conductance de drain. — L'expression (9) peut s'écrire

$$G_A / G_0 = 1 + (V_a / 2 V_{c0})$$

où G_A est la conductance de drain, ou de canal, en continu pour la tension de drain V_a.

G_0 est la conductance du canal sans tension appliquée, c'est-à-dire la conductance du goulot. Cette expression, linéaire en V_a, a été représentée figure 9 en coordonnées normalisées. De même, l'expression (10) peut s'écrire

$$g_a / G_0 = 1 + (V_a / V_{c0})$$

g_a étant la conductance de drain en alternatif.

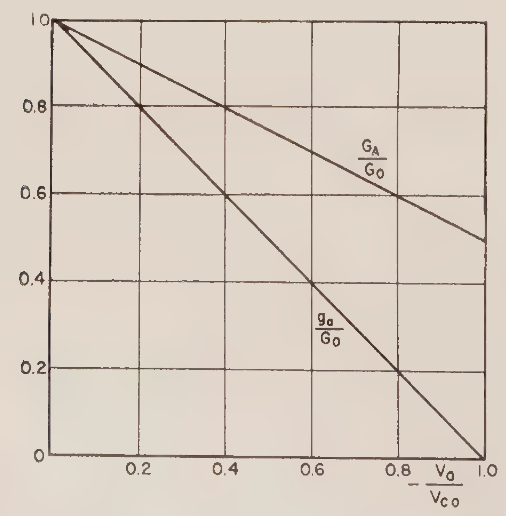


FIG. 9. — Variation de la conductance en continu et de la conductance en alternatif.

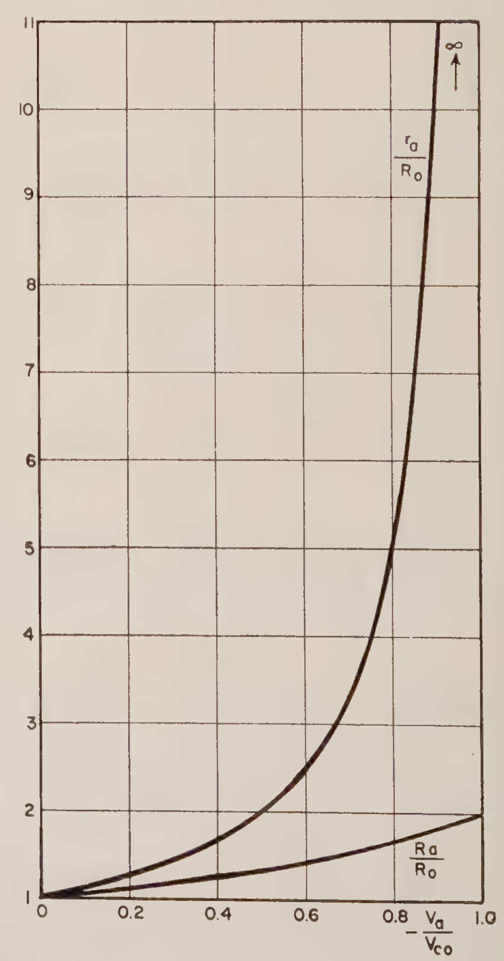


FIG. 10. — Variation de la résistance en continu et de la résistance en alternatif.

Cette équation a également été représentée figure 9.

Il est parfois plus commode d'utiliser les résistances que les conductances. Aussi les deux courbes précédentes ont-elles été transformées pour donner en figure 10 la variation de la résistance de drain en continu R_A et de la résistance de drain en alternatif r_a.

Conductance de transfert. — La pente est donnée par l'expression (15)

$$\frac{g_m}{G_0} = -\frac{V_a}{V_{c0}}$$

et est fonction de la polarisation de goulot V_c à travers V_a.

En conséquence, la famille des courbes représentant g_m a été reproduire en figure 11 avec V_c en paramètre et en coordonnées normalisées.

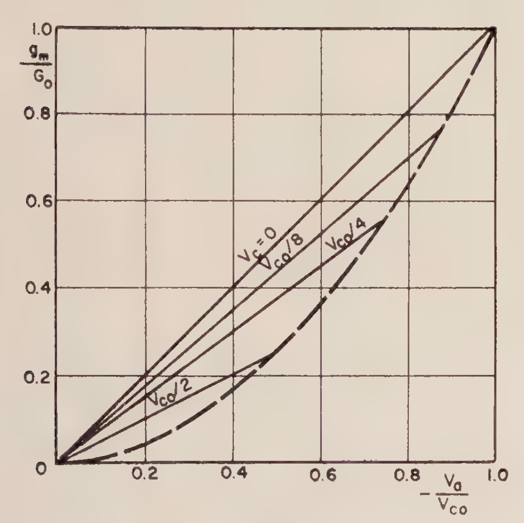


Fig. 11. — Variation de la pente en fonction de la polarisation.

Ligne coaxiale. — Aux fréquences très élevées, on peut considérer la partie active du tecnetron comme une ligne de transmission coaxiale. L'électrode de goulot constitue le conducteur externe, le canal, le conducteur central, et la zone à charge d'espace le diélectrique. Il s'agit évidemment d'une ligne très particulière, dont la capacitance linéique est constante mais dont la résistance et l'inductance linéiques varient.

On peut cependant appliquer les équations classiques des lignes de transmission à chaque petite fraction du goulot. La constante de propagation est définie par

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

où α est la constante d'atténuation et β la constante de phase.

Les valeurs linéiques de résistance, inductance, conductance et capacitance étant respectivement

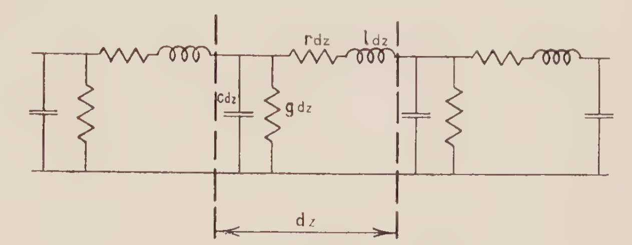


Fig. 12. — Longueur élémentaire de ligne coaxiale équivalente.

r_1, l_1, g_1 et c_1 pour l'élément considéré (*fig.* 12) on a

$$(\alpha + j\beta) = [(r_1 + j\omega l_1)(g_1 + j\omega c_1)]^{1/2}. \qquad (40)$$

On élève au carré, on sépare les parties réelle et imaginaire, et on résout le système de deux équations pour obtenir

$$\alpha = \left[\frac{1}{2}\left\{(r_1^2 + \omega^2 l_1^2)(g_1^2 + \omega^2 c_1^2)\right\}^{1/2} + \frac{1}{2}(r g_1 - \omega^2 l_1 c_1)\right]^{1/2}$$

$$\beta = \left[\frac{1}{2}\left\{(r_1^2 + \omega^2 l_1^2)(g_1^2 + \omega^2 c_1^2)\right\}^{1/2} - \frac{1}{2}(r g_1 - \omega^2 l_1 c_1)\right]^{1/2}. \qquad (41)$$

Ces deux expressions peu faciles à manier peuvent être simplifiées si l'on admet que l'inductance est négligeable vis-à-vis de la résistance élevée du canal, et que la conductance shunt est négligeable vis-à-vis de la capacité shunt. On obtient alors

$$\alpha = \beta = (r_1 c_1 \omega / 2)^{1/2} \qquad (42)$$

que l'on va résoudre pour α :

$$\alpha^2 = (c_1 \omega / 2)\, r_1$$

et comme

$$r_1 = 1 / \pi \sigma a^2$$

on obtient

$$\alpha^2 = \frac{c_1 \omega}{2 \pi \sigma b^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{l}\right)^{1/2}} \qquad (43)$$

d'où l'on tire l'atténuation totale

$$A^2 = \int_0^l \frac{c_1 \omega}{2 \pi \sigma b^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{l}\right)^{1/2}} dz \qquad (44)$$

et en intégrant

$$A^2 = \frac{\omega c_1 l^2}{\pi \sigma b^2} = \omega c_1 l R_0.$$

Le même résultat est valable pour la phase totale B de sorte que

$$A = B = (\omega c_1 l R_0)^{1/2}. \qquad (45)$$

Si l'on remplace c_1 et R_0 par leurs valeurs, il vient

$$A = \frac{8 \varepsilon l^2 \omega}{3 \sigma b^2}. \qquad (46)$$

L'impédance caractéristique est évidemment fonction de z. On a

$$Z_c = (r_1 / j \omega c_1)^{1/2}$$

que l'on peut écrire

$$Z_c = \left(\frac{r_1}{2 \omega c_1}\right)^{1/2} - j \left(\frac{r_1}{2 \omega c_1}\right)^{1/2}. \qquad (47)$$

Cependant, dès que l'on considère la propagation le long du canal, il est indispensable d'inclure l'inductance, si faible soit-elle. On repart alors de l'équation (41), et le calcul procède selon la même méthode que précédemment. On obtient sans difficulté

$$\alpha = (\omega c_1 / \sqrt{2}) \, [(r_1^2 + \omega^2 l_1^2)^{1/2} - \omega l_1]^{1/2}$$

et

$$\beta = (\omega c_1 / \sqrt{2}) \, [(r_1^2 + \omega^2 l_1^2)^{1/2} + \omega l_1]^{1/2}$$

et de même

$$Z_c = (2 \omega c_1)^{-1/2} \left\{ [r_1^2 + \omega^2 l_1^2)^{1/2} + \omega l_1]^{1/2} + j[(r_1^2 + \omega^2 l_1^2)^{1/2} - \omega l_1]^{1/2} \right\}. \qquad (48)$$

Manuscrit reçu le 20 janvier 1960.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

SUPPLÉMENT AU N° 3.
TOME 21, MARS 1960, PAGE 37 A.

DÉTERMINATION DE L'ENTROPIE D'ÉBULLITION

Par Jovanka M. ŽIVOJINOV,
Institut de Physique de l'École Polytechnique de Belgrade.

Résumé. — Dans notre thèse, nous avons donné une équation qui détermine le rapport entre la température d'ébullition et la pression correspondante. Nous avons trouvé l'exposant n et la constante a de cette équation qui nous ont servi ici pour calculer les entropies d'ébullition pour les mêmes substances. Elles correspondent mieux aux résultats expérimentaux que les valeurs obtenues par l'équation de D. Milosavljević.

Abstract. — In our thesis, we have given an equation which determines the relation between the ebullition temperature and the corresponding pressure. We have found the index n and the constant a of this equation, and used them to calculate the ebullition entropy for the same substances. They are in better agreement with experimental values than those given by D. Milosavljevic's equation.

Nous avons proposé [1] l'équation

$$\ln \frac{p_K}{p} = a \left(\frac{T_K}{T} - 1\right)^n, \qquad (1)$$

qui donne la relation entre la température d'ébullition et la pression correspondante, où p_K (Kg/cm²) est la pression critique et p (Kg/cm²) celle d'ébullition, T_K (°K) la température critique, T (°K) celle d'ébullition, tandis que a et l'exposant n sont des constantes caractéristiques pour chaque substance traitée.

Nous avons trouvé que le domaine d'application de l'équation (1) s'étend à tout l'intervalle entre les points triple et critique ; les quantités a et n ont les valeurs $a = 7{,}477$ et $n = 1{,}075$ pour l'eau et $a = 9{,}322$ et $n = 1{,}088$ pour l'alcool éthylique.

Pour l'entropie d'ébullition, nous avons donné [1] l'expression suivante

$$\Delta S = anp \frac{T_K}{T^2} \left(\frac{T_K}{T} - 1\right)^{n-1} (v'' - v'), \qquad (2)$$

où v'' (cm³/g) et v' (cm³/g) sont les volumes spécifiques pour la vapeur et le liquide à la même température de substance traitée. Pour l'eau, l'équation (2) nous donne :

$$\Delta S = 0{,}1885\ p \frac{647{,}36}{T^2} \left(\frac{647{,}36}{T} - 1\right)^{0,\ 0} (v'' - v') \left(\frac{\text{cal}}{\text{g °K}}\right), \qquad (3)$$

et pour l'alcool éthylique :

$$\Delta S = 0{,}2378\ p \frac{516{,}26}{T^2} \left(\frac{516{,}26}{T} - 1\right)^{0{,}088} (v'' - v') \left(\frac{\text{cal}}{\text{g °K}}\right). \qquad (4)$$

TABLEAU I

L'ENTROPIE D'ÉBULLITION POUR L'EAU (*)

T [°K]	p $\left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right]$	v' $\left[\frac{\text{cm}^3}{\text{g}}\right]$	v'' $\left[\frac{\text{cm}^3}{\text{g}}\right]$	ΔS $\left[\frac{\text{cal}}{\text{g °K}}\right]$ *Expérim.*	ΔS $\left[\frac{\text{cal}}{\text{g °K}}\right]$ *Équation.* (3)	$\delta(\Delta S)$ %	ΔS $\left[\frac{\text{cal}}{\text{g °K}}\right]$ *Équation.* (6)	$\delta(\Delta S)$ %
—	—	—	—	—	—	—	—	—
273,16 (p. triple)	0,00623	1,0002	206 300	2,18	2,15	+ 1,4	2,06	+ 5,5
323,16	0,1258	1,0121	12 050	1,76	1,77	— 0,6	1,71	+ 2,8
373,16	1,0332	1,0435	1 673	1,44	1,48	— 2,8	1,46	— 1,4
423,16	4,854	1,0906	392,4	1,19	1,23	— 3,4	1,27	— 6,7
473,16	15,857	1,1565	127,3	0,98	1,01	— 3,1	1,12	— 14,3
523,16	40,56	1,2512	50,06	0,78	0,79	— 1,3	1,01	— 29,5
573,16	87,61	1,4036	21,63	0,58	0,57	+ 1,7	0,91	— 56,9
623,16	168,63	1,747	8,80	0,34	0,29	+ 14,7	0,83	— 144,1
647,36 (p. critique)	225,5	3,066	3,066	0	0	—	0,79	—

(*) Ch. D. Hodgman, *Handbook of Chemistry and Physics*, Cleveland, Ohio, 1946.

TABLEAU II

L'ENTROPIE D'ÉBULLITION POUR L'ALCOOL ÉTHYLIQUE (*)

T [°K]	$p \left[\frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}\right]$	$v' \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{g}}\right]$	$v'' \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{g}}\right]$	$\Delta S \left[\frac{\text{cal}}{\text{g °K}}\right]$ *Expérim.*	$\Delta S \left[\frac{\text{cal}}{\text{g °K}}\right]$ *Équation* (4)	$\delta(\Delta S)$ %	$\Delta S \left[\frac{\text{cal}}{\text{g °K}}\right]$ *Équation* (7)	$\delta(\Delta S)$ %
—	—	—	—	—	—	—	—	—
351,46 (p. d'ébullition)	1,033	1,358	606,060	0,581	0,582	— 0,2	0,583	— 0,3
353,16	1,104	1,361	574,713	0,575	0,582	— 1,2	0,580	— 0,9
373,16	2,302	1,397	284,900	0,519	0,529	— 1,9	0,540	— 4,0
393,16	4,383	1,444	151,976	0,462	0,473	— 2,4	0,506	— 9,5
413,16	7,733	1,508	86,806	0,411	0,420	— 2,2	0,475	— 15,6
433,16	12,799	1,580	52,192	0,359	0,367	— 2,2	0,448	— 24,8
453,16	20,082	1,671	32,103	0,301	0,307	— 2,0	0,423	— 40,5
473,16	30,164	1,796	19,685	0,242	0,240	+ 0,8	0,400	— 65,3
493,16	43,779	2,017	11,710	0,174	0,164	+ 5,7	0,380	— 118,4
516,26 (p. critique)	65,193	3,630	3,630	0	0	0	0,358	—

(*) Ch. D. HODGMAN, *Handbook of Chemistry and Physics*, Cleveland, Ohio, 1946.

En partant des équations (3) et (4), nous avons déterminé l'entropie d'ébullition pour les substances citées. Les résultats se trouvent groupés dans les tableaux I et II. Comme le montre celui-ci, les écarts δ de valeurs pour l'entropie d'ébullition se trouvent dans les limites des erreurs expérimentales pour T, T_K, p, p_K, v'' et v'.

Dans ce travail, nous avons déterminé aussi l'entropie d'ébullition pour les mêmes substances, à de partir l'équation

$$\Delta S = \frac{1{,}987}{M}\, an \left(\frac{T_K}{T}\right)^n \left(\frac{\text{cal}}{\text{g °K}}\right) \tag{5}$$

proposée par D. Milosavljević [2] et [3], où M est le poids moléculaire de la substance considérée, a une constante universelle, dont la valeur est 6,55, tandis que l'exposant n est une quantité caractéristique pour chaque substance. Pour l'eau, D. Milosavljević a trouvé [3] $n = 1{,}102$ et pour l'alcool éthylique nous avons trouvé [4] $n = 1{,}268$.

Dans ce travail, nous avons obtenu, en partant de l'équation (5), l'entropie d'ébullition de l'eau

$$\Delta S = 0{,}7961 \left(\frac{647{,}36}{T}\right)^{1{,}102} \left(\frac{\text{cal}}{\text{g °K}}\right), \tag{6}$$

et celle de l'alcool éthylique

$$\Delta S = 0{,}3582 \left(\frac{516{,}26}{T}\right)^{1{,}268} \left(\frac{\text{cal}}{\text{g °K}}\right). \tag{7}$$

Pour les substances nommées, nous avons déterminé l'entropie d'ébullition, et les résultats obtenus se trouvent eux aussi dans le tableau I et II.

Comme dans nos recherches antérieures, [4], [5], [6] et [7], nous n'avons obtenu ici, en partant de l'équation (5), de très bons résultats pour les températures voisines des températures d'ébullition ($p = 76$ cm Hg). Pour les températures plus hautes et plus basses que celles-ci, nous avons constaté de grands écarts entre les valeurs tirées de l'équation (5) et les valeurs expérimentales. En même temps, nous concluons que notre équation (2) est valable pour tout le domaine de saturation.

Manuscrit reçu le 6 juillet 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ŽIVOJINOV (J.), *Sc. W. of the Fac. of Mech. Eng.*, Belgrade, 1956-1958, 1-24.
[2] MILOSAVLJEVIĆ (D.), *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1947, **224**, 1345.
[3] MILOSAVLJEVIĆ (D.), *Bull. Soc. Chim.*, Belgrade, 1949, **1**, 14.
[4] ŽIVOJINOV (J.), *Bull. Soc. Chim.*, Belgrade, 1952, **2**, 17.
[5] ŽIVOJINOV (J.), *Bull. Soc. Chim.*, Belgrade, 1953, **4**, 18.
[6] JOVANOVIĆ (Dj.) et ŽIVOJINOV (J.), *Sc. W. of the Fac. of Mech. Eng.*, Belgrade, 1956, 154-160.
[7] ŽIVOJINOV (J.), *J. Physique Rad.*, Paris, 1955, **16**, 693-694.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

SUPPLÉMENT AU N° 3.
TOME 21, MARS 1960, PAGE 39 A.

RÉGULATEUR DE COURANT TRANSISTORISÉ POUR AIMANT VARIAN DE 12 POUCES

Par Paul JUNG,
European Research Associates, Bruxelles.

Résumé. — Le courant d'un aimant Varian V 4012 est réglé au moyen de transistors de puissance. Un servo-mécanisme limite la tension appliquée aux transistors, en agissant sur un autotransformateur placé à l'entrée du redresseur. Un facteur de stabilisation de 1,5 10^5 est obtenu. Une description détaillée est fournie.

Abstract. — Power transistors are used to control the current of a Varian V 4012 magnet. The voltage applied to the transistors is limited by a servo-mechanism which acts upon a variable transformer at the input of the rectifier. A stabilization factor of 1.5×10^5 has been achieved. A detailed description of the instrument is given.

Introduction. — La régulation et la stabilisation du courant dans les électro-aimants est en général nécessaire pour les applications à la résonance nucléaire et électronique.

Lorsque l'on utilise des tubes de passage pour contrôler le courant, les enroulements de l'électro-aimant sont de préférence à haute impédance et l'on doit appliquer des tensions élevées. Dans ce cas, le rendement global du régulateur ne dépasse guère 50 %. Un exemple en est le régulateur de courant construit par Varian [1].

Par contre, l'emploi de transistors de passage exige des enroulements à faible impédance et le passage d'un courant élevé. Le rendement global peut atteindre une valeur élevée : 95 %. Un tel régulateur a été réalisé par R. L. Garwin [2]. L'amélioration du rendement conduit non seulement à une économie de courant électrique, mais encore simplifie le problème de la dissipation des calories.

Au laboratoire, le problème se pose souvent dans un ordre inverse. On possède un aimant et on désire stabiliser le courant. Dans ce qui suit, nous nous proposons de décrire la stabilisation par transistors d'un aimant Varian V 4012 A.

Le principe du régulateur. — Les enroulements de l'aimant peuvent être mis en parallèle. Leur résistance est alors de 18,4 ohms. Une tension de 300 volts est nécessaire pour atteindre le courant maximum de 16 ampères. Cette tension dépasse la tension limite permise pour les transistors et des dispositifs spéciaux sont nécessaires pour protéger ces derniers. Dans ce but, nous avons apporté quelques modifications au montage de R. L. Garwin [2]. Un autotransformateur à rapport variable fournit la tension d'alimentation au redresseur. Un servomécanisme agit sur l'autotransformateur de manière à maintenir la tension collecteur-émetteur des transistors de passage au-dessous de 9 volts.

Le diagramme synoptique. — La figure 1 (p. 40) montre le diagramme synoptique, ainsi que le schéma détaillé des parties essentielles du régulateur. La source de courant se compose d'un autotransformateur variable suivi d'un redresseur et d'un filtre.

Le courant passe ensuite par les transistors, le shunt et l'aimant. La tension développée aux bornes du shunt est opposée à une tension de référence et la différence (tension d'erreur) est amplifiée par un microvoltmètre amplificateur. La tension de sortie de ce dernier est appliquée comme potentiel de contrôle aux transistors de passage.

La tension collecteur-émetteur des transistors de passage est comparée à une tension de référence de 9 volts. La différence de tension commande un moteur asservi agissant sur l'autotransformateur variable.

Description détaillée du régulateur. — *a*) La source de courant. — Le redresseur est constitué par 12 éléments au silicium WN 5051 E, Westinghouse, montés en pont monophasé. Le filtre se compose d'une self de 40 mH et d'une batterie de capacités électrolytiques (3 000 μF).

b) Les transistors de passage. — Les transistors de passage (4 × 2 N 278 Delco) sont montés chacun sur une ailette en cuivre de 15 × 15 cm refroidie par ventilation forcée et sont commandés par un transistor monté en emitter-follower. Comme la rapidité de réponse du servomoteur est insuffisante pour empêcher des surtensions transitoires brèves, deux diodes Zener (Texas Instrument 653) protègent les transistors contre des surtensions quasi instantanées, venant soit de la chaîne d'amplification, soit de l'alimentation.

c) Le shunt et le circuit de référence. — Le shunt est bobiné en fil de manganine et refroidi par convection dans l'air. Le potentiel de réfé-

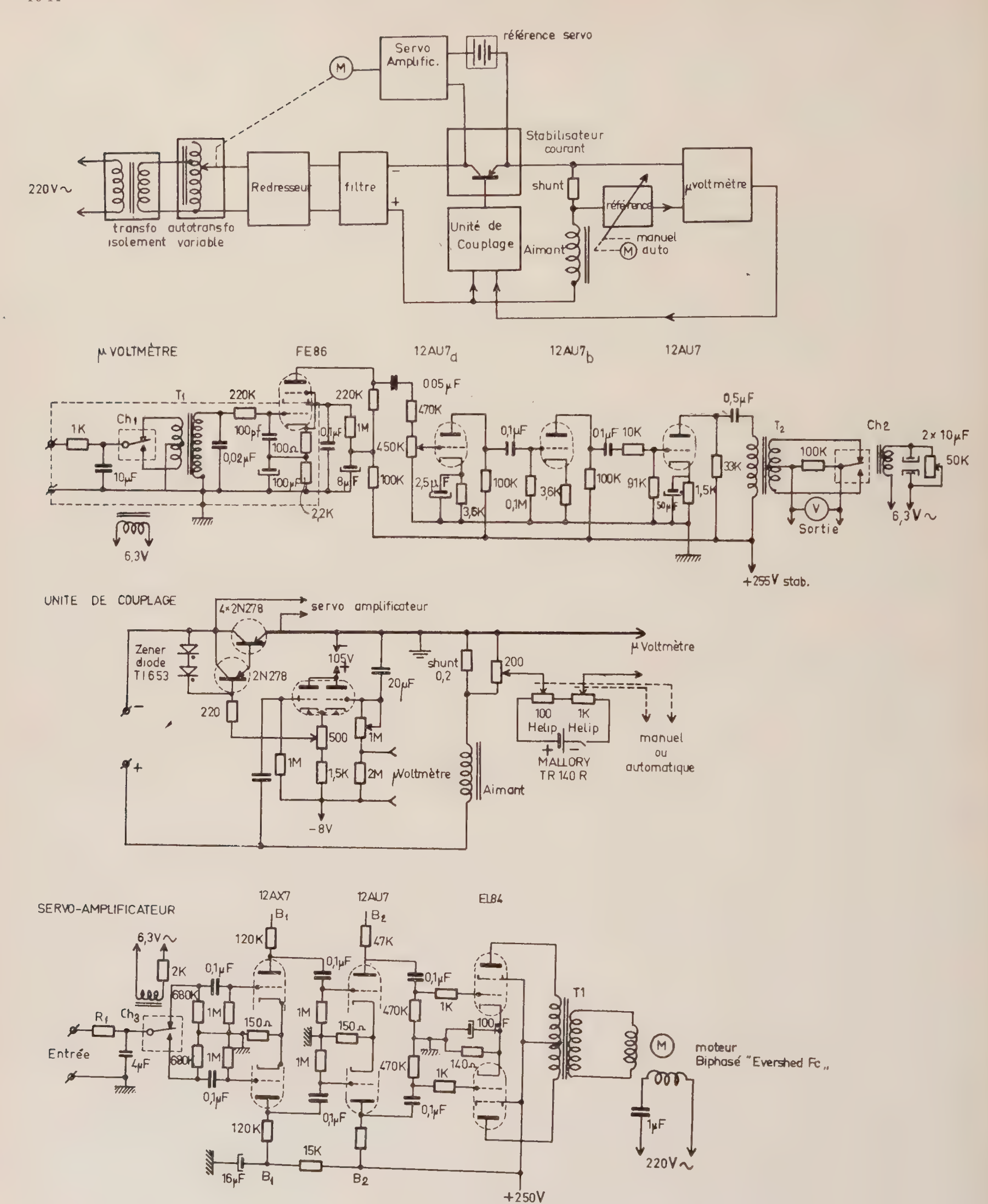


FIG. 1. — Régulateur de courant de l'aimant.

rence formé par une pile au mercure Mallory TR 140 R, est divisé au moyen de deux potentiomètres de précision. Si une stabilité et une reproductibilité à long terme sont indispensables, l'ensemble shunt et référence peut être plus soigné.

d) Le micro-voltmètre amplificateur. — Le micro-voltmètre amplificateur est du type à vibreur. A l'entrée de cet appareil se trouvent un vibreur Philips R 741750 et une transformateur d'adaptation Philips AM 7627/0,90 H. Le gain effectif de l'amplificateur (volts continus sortie/volts continus entrée) est de $1{,}5.10^6$.

e) L'unité de couplage. — Nous nous sommes servis d'une double triode montée en cathode follower pour commander les transistors. Ceci nous semblait commode en raison de la facilité d'appliquer les potentiels avec les constantes de temps convenables. Ainsi, la sortie du micro-voltmètre est connectée à une grille au travers d'un filtre 0,25 MΩ, 20 μF. L'autre grille reçoit une tension dérivée directement de l'aimant. Cette boucle agit comme un stabilisateur de tension aux bornes de l'aimant. Elle assure la stabilité de l'ensemble en évitant les oscillations spontanées [2].

f) L'amplificateur pour servo-moteur. — L'amplificateur pour servo-moteur est également du type à vibreur. Comme il n'est pas nécessaire de contrôler la tension à l'entrée avec une précision supérieure à ± 0,2 volts, un petit relais polarisé fait office de vibreur (Ch_3). Le servo-moteur (Evershed Fc) est couplé par une démultiplication à l'autotransformateur variable.

Principe de fonctionnement. — Nous avons la relation :

$$e = v + (R + r)\, i$$

$$v = ri\,\mu g$$

$$\boxed{i = \frac{e}{R + r(1 + \mu g)}.}$$

Dans notre cas $\mu g \gg 1$ et $r\,\mu g \gg R$

$$\boxed{i = e/r\,\mu g.}$$

Soit I le courant constant de repos et E la tension constante de repos de l'alimentation

$$\boxed{\frac{i}{I} \approx \frac{e}{E}\frac{R}{r}\frac{1}{\mu g},}$$

Soit $\frac{e}{E} \Big/ \frac{i}{I}$ le facteur de stabilisation S

$$\boxed{S = \frac{r}{R}\mu g.}$$

Le gain du micro-voltmètre est $1{,}5.10^6$. Le gain g est le produit du gain en tension des transistors (environ 14) et du cathode follower (environ 0,7).

$$g \approx 10$$

$$\boxed{S = 10^{-2} \times 1{,}5.10^6 \times 10 = 1{,}5.10^5.}$$

Le facteur de stabilisation est donc de l'ordre de 10^5. Si l'on tient compte en plus du fait que e/E est certainement inférieur à 10^{-1}, la précision relative de la stabilisation en courant est de 10^{-6}.

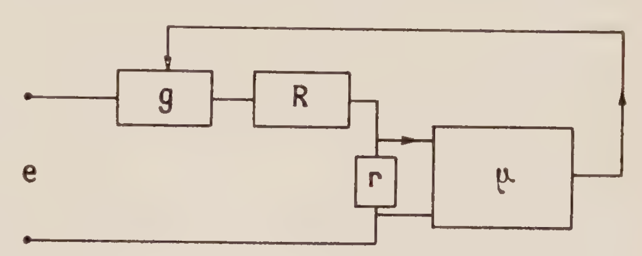


Fig. 2. — Schéma simplifié du régulateur.

e : variation de tension à l'entrée du régulateur,
R : résistance de l'aimant,
r : résistance du shunt,
μ : gain du μ-voltmètre amplificateur,
g : gain en tension de l'ensemble — unité de couplage — transistors,
v : variation de tension aux bornes des transistors,
i : courant dans l'aimant.

Nous utilisons généralement un champ de 3 000 gauss. La stabilité du champ est donc de $3\,000 \times 10^{-6} = 3.10^{-3}$ gauss, si l'on ne tient pas compte de variations du champ provenant d'autres perturbations. Cette précision est suffisante pour les expériences de résonance paramagnétique électronique et n'est d'ailleurs pas inférieure à celle du régulateur construit par Variant [1].

Quelques remarques à propos de la réalisation. — L'aimant Varian est protégé contre les défauts de pression d'eau de refroidissement. Lorsque les enroulements sont mis en parallèle, la protection contre les surtensions prévue par le constructeur devient inefficace. Nous avons, par conséquent, ajouté une protection sous forme d'une diode au silicium Westinghouse 303-E branchée aux bornes de l'aimant.

Le choix judicieux du point de masse est important. Nous avons mis le point commun du shunt et de l'émetteur du transistor de passage à la masse. Ce point est également commun au micro-voltmètre et au servo-amplificateur.

Nous avons monté les transistors et l'unité de couplage sur un châssis, sur le panneau duquel se trouvent deux appareils indiquant la tension aux bornes de l'aimant et des transistors.

Le shunt de l'unité de référence se trouve sur un autre châssis. Les potentiomètres de 100 et de 1 000 ohms sont du modèle à 10 tours linéaires (Hélipot). La résolution de ces derniers est plus fine que la graduation du cadran. Si l'on admet que l'on peut reproduire sur le cadran 1/2 division sur 1 000, les deux potentiomètres en série permettent un réglage à 1/20 000 près ; ce qui représente 0,15 gauss sur 3 000 gauss. Les axes des potentiomètres « Helipot » sont accessibles de part et d'autre de ceux-ci, ce qui permet de monter du côté du panneau les boutons gradués et de l'autre côté un moteur à deux sens de rotation. Ce moteur peut être embrayé sur l'un ou sur l'autre axe, effectuant ainsi un balayage linéaire lent ou rapide, positif ou négatif. La vitesse de ce balayage peut en plus être modifiée en interchangeant les engrenages.

Le fonctionnement de l'ensemble autotransformateur-moteur-amplificateur nécessite quelques remarques. La tension d'un autotransformateur courant varie par bonds d'une fraction de volts. Il n'en résulte pourtant aucun « bruit » dans le système, grâce à la boucle rapide de contre-réaction en tension.

Par contre, le moteur travaillerait sans arrêt si l'amplificateur-servo était trop sensible. Nous avons réglé le gain de manière à laisser une « zone morte » de $\pm$ 0,5 volts, tension insuffisante pour entraîner l'autotransformateur. La rapidité de réponse de la rotation de l'axe du transformateur doit être égale ou inférieure à la vitesse maximum d'augmentation du courant dans l'aimant. Dans ce cas, à la mise en marche de l'installation, le point de fonctionnement est atteint sans « overshot ». Un inverseur monté sur le panneau permet de commander le servomoteur, sans passer par le servo-ampli.

Mode opératoire : La mise en marche se fait dans l'ordre suivant : On ouvre la circulation d'eau. L'autotransformateur est à zéro, le potentiel de référence également. Le transformateur est ensuite branché sur le courant, en même temps que le ventilateur pour les transistors. Le micro-voltmètre est enclenché, ainsi que la pile de référence et le servo-moteur. Le micro-voltmètre atteint son fonctionnement de régime endéans une minute. On amène ensuite manuellement ou automatiquement les potentiomètres à la position désirée. L'ensemble se met à l'équilibre endéans 1/2 minute environ.

Pour arrêter le régulateur nous remettons en général les potentiomètres à zéro et attendons que le servo-moteur fasse revenir l'autotransformateur à zéro, avant de couper les autres circuits. Étant données les protections prévues, on peut cependant couper l'interrupteur général pour arrêter le régulateur sans causer des dommages à l'installation. De fausses manœuvres éventuelles ne causeraient pas de dégâts.

Ce travail a été financé par la Union Carbide Corporation, New York: N. Y.

Manuscrit reçu le 29 janvier 1960.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Regulated Magnet Power Supply V 2100, Varian Technical Manuel TM 5 B.

[2] Garwin (R. L.), *Rev. Sc. Instr.*, 1958, **29**, 3, 223.
Garwin (R. L.), Hutchison (D.), Penman (S.) et Shapiro (G.), *Rev. Sc. Instr.*, 1959, **30**, 2, 105.

SUPPLÉMENT AU N° 3.
TOME 21, MARS 1960, PAGE 43 A.

ÉTUDE DE LA RÉSONANCE FERROMAGNÉTIQUE DANS LES MATÉRIAUX CONDUCTEURS (BANDE X : f = 10 000 MHz) MESURES D'ÉCHANTILLONS MONOCRISTALLINS DE FERRO-SILICIUM

Par ALBERT S. STRUB,
Laboratoire de Haute-Fréquence de la Faculté des Sciences de Grenoble (1).

Résumé. — Un appareillage destiné à l'étude de la résonance ferromagnétique dans les matériaux conducteurs a été réalisé, pour la bande X (f = 10 000 MHz). Ce montage — complété par une balance magnétique — est particulièrement approprié à des mesures sur des échantillons à structure orientée. Il a servi à étudier deux monocristaux de ferro-silicium (1,8 % de Si) présentés sous forme de disques minces, dont la surface soumise à l'onde UHF correspondait, pour le premier échantillon au plan (001) et pour le deuxième au plan (112).

Après une partie théorique, des résultats de mesures sont présentés et discutés (mesure de la constante d'anisotropie K_1, du couple d'anisotropie $\mathrm{d}W/\mathrm{d}\theta$, du champ de résonance $H_{z,\mathrm{res}}$, de la perméabilité apparente en fonction de H_z et de l'orientation de θ). Les détails essentiels de l'appareillage de mesure utilisé sont indiqués.

Abstract. — An X-band microwave apparatus for the measurement of ferromagnetic resonance of conducting ferromagnetics has been developed. This apparatus — together with a magnetic torsion balance — is especially adapted for investigations on samples with an oriented crystal structure. It was used for measuring two silicon-iron crystals (1.8 % of Si), in the form of thin disks. The first crystal has a surface parallel to a (001) plane, the second one a surface parallel to a (112) plane.

After a theoretical part, experimental results are given and discussed (measurements of anisotropy constant K_1, anisotropy torque $\mathrm{d}W/\mathrm{d}\theta$, resonance field $H_{z,\mathrm{res}}$, and apparent permeability as a function of H_z and of the orientation θ).

Some essential details of the equipment used are described.

INTRODUCTION

La plupart des expériences de résonance ferromagnétique entreprises en ondes centimétriques, avec des échantillons conducteurs, se sont bornées à la mesure de l'absorption relative du matériau étudié, en fonction du champ continu appliqué. Seule la valeur H_{res} de ce champ, nécessaire à la résonance, peut être ainsi déterminée. Les montages de mesure nécessaires sont relativement simples.

Si l'on veut obtenir des valeurs absolues de la perméabilité complexe, il faut au préalable déterminer les deux grandeurs μ_{R} et μ_{L} (2) (« perméabilité apparente »), et la technique des mesures devient plus compliquée. En effet, elle exige non seulement des mesures absolues de qualité sur des cavités résonnantes, mais aussi la mesure de variations de fréquence de résonance extrêmement faibles.

Des mesures de ce genre paraissent particulièrement intéressantes sur des matériaux monocristallins [1]. Si l'on les effectue dans la bande de fréquences X (f = 10 000 MHz), on peut produire la résonance ferromagnétique dans les échantillons à des champs continus assez faibles. Ceci complique un peu l'interprétation des résultats (car les échantillons ne sont pas toujours aimantés à saturation), mais en revanche donne lieu à des phénomènes intéressants qui ne peuvent se produire dans un milieu saturé.

Dans le but d'entreprendre des mesures sur des monocristaux de ferro-silicium (1,8 % de Si), dont les résultats sont présentés dans cette publication nous avons développé le montage nécessaire pour un travail à 9 350 MHz environ. Nous avons disposé d'échantillons sous forme de disques de tôle mince, que nous avons fait constituer le fond d'une cavité circulaire résonnante sur le mode H_{114}.

Pour augmenter la valeur des résultats, nous avons également entrepris des mesures directes, effectuées sur les échantillons eux-mêmes, de la constante d'anisotropie K_1 (avec une balance de torsion), de la conductivité électrique et de la composition chimique.

THÉORIE

Résonance ferromagnétique. — Soit un disque plat de matériau ferromagnétique que nous sou-

(1) Actuellement à : EURATOM, 51-53, rue Belliard, Bruxelles.

(2) Dans cet exposé nous utiliserons les relations habituelles : $\mu_r = \mu_r' - j\mu_r''$ perméabilité réversible complexe et

$$\mu_R = |\mu_r| + \mu_r' \qquad (\text{cf. } [1])$$

$$\mu_L = |\mu_r| - \mu_r'$$

mettons à un champ magnétique continu H_z, en même temps qu'à un champ magnétique alternatif H_x, dont la direction est perpendiculaire à celle de H_z. H_x, d'amplitude très faible par rapport à H_z, sera fourni par une onde électromagnétique (UHF) de fréquence angulaire ω, se propageant perpendiculairement à H_x et à H_z, qui sont tous les deux parallèles à la face du disque.

Dans le cas où le disque est anisotrope, la fréquence de résonance ω_0 est donnée par [2], [3]

$$\omega_0 = \gamma \{ [H_z + (N_x + N_{ex} - N_z) I_z] [H_z + (N_y + N_{ey} - N_z) I_z] \}^{1/2} \quad (1)$$

γ = facteur gyromagnétique.
N_x, N_y, N_z = facteurs de désaimantation [12].
N_{ex}, N_{ey} = facteurs de désaimantation effectifs tenant compte de l'énergie d'anisotropie, en introduisant un champ magnétique fictif [2], [3].
I_z = aimantation dans la direction z (normalement égale à l'aimantation de saturation I_S).

Quant à la susceptibilité et la perméabilité en fonction de H_z et de la fréquence angulaire ω_0, nous rappelons d'abord la relation indiquée par Kittel [3], [4] pour un échantillon anisotrope ($N_{ex} = N_{ey} = 0$) ayant la forme d'un ellipsoïde général :

$$\chi_x = \frac{I_x}{H_x} = \frac{\chi_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \quad (2)$$

où

$$\chi_0 = \frac{I_z}{H_z + (N_x - N_z)} \quad (3)$$

χ_x est la composante de la susceptibilité parallèle à H_x.

Cette équation (2) ne tient pas compte de *l'amortissement* du système résonnant. Les premiers à utiliser des relations en tenant compte furent Landau et Lifschitz [5]. Parmi les autres citons Bloembergen [5] qui, par analogie avec la résonance paramagnétique nucléaire, donne les relations suivantes pour la perméabilité complexe, relations que nous utiliserons d'ailleurs plus loin :

$$\mu' = \frac{4\pi\gamma^2 I_z[H_0 + (N_y - N_z) I_z] (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/T_2^2} \quad (4)$$

$$\mu'' = \frac{4\pi\gamma^2 I_z[H_0 + (N_y - N_z) I_z] 2\omega/T_2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/T_2}. \quad (5)$$

Dans ces équations, ω_0 peut être calculée avec une bonne approximation à l'aide de (1). Le terme T_2 (correspondant au « paramètre de relaxation spin-spin » de la résonance nucléaire) doit être déterminé expérimentalement et s'obtient par

$$\frac{1}{T_2} = \frac{4\pi\gamma^2 I_z[H_{z\max} + (N_y - N_z) I_z]}{\omega\mu_{R\max}} \quad (6)$$

$H_{z\max}$ = valeur du champ H_z nécessaire à l'obtention de $\mu_{R\max}$.

Principe des mesures UHF. — On détermine pour la cavité, qui contient l'échantillon, la « surtension interne » de référence Q_0, pour une valeur choisie du champ magnétique continu H_z, puis on mesure les variations Q_0 que l'on obtient en modifiant H_z. Les valeurs de μ_R pourront être ainsi obtenues. On mesure enfin les variations Δf_{res} de la fréquence de résonance de la cavité, ce qui fournit μ_L.

Détermination de μ_R. — La cavité que nous avons utilisée contient de l'air. Une partie de la paroi est remplacée par le matériau à étudier (σ_2, μ_{R2}). Le reste est fait en laiton (σ_1, $\mu_{R1} = 1$) (σ est la conductivité électrique).

Le calcul classique nous amène à la relation suivante pour la surtension à vide Q_0 :

$$\frac{1}{Q_0} = C_1 + \frac{\sqrt{\mu_{R2}}}{\sqrt{\sigma_2}} C_2 \quad (7)$$

C_1 et C_2 sont des constantes (à fréquence fixe) indépendantes du matériau étudié. Nous en avons effectué le calcul pour la cavité utilisée. Pour pouvoir mesurer C_1 et C_2 il faut disposer de deux échantillons dont la perméabilité et la conductivité sont connues. Si ces deux échantillons possèdent une perméabilité relative égale à l'unité (seul cas pratique), C_1 et C_2 peuvent être déterminées une fois pour toutes avec deux mesures de surtension. Ensuite, la perméabilité inconnue μ_{RA} d'un échantillon s'obtient par une seule mesure de surtension Q_{0A} :

$$\sqrt{\mu_{RA}} = \sqrt{\sigma_A} \cdot \frac{\frac{1}{Q_{0A}} - C_1}{C_2}. \quad (8)$$

Cependant, les résultats ainsi obtenus pour μ_R doivent encore subir une correction.

En effet, la configuration du champ hyperfréquences qui règne dans une cavité H_{11n} est telle, que son champ magnétique possède toujours une petite composante parallèle au champ continu appliqué qui, elle, ne contribue pas à la perméabilité. En en tenant compte par le calcul on aboutit finalement à la formule suivante pour la correction des valeurs mesurées [7] :

$$\sqrt{\mu_R}_{\text{réel}} = 1{,}043 \sqrt{\mu_R}_{\text{mesuré}} - 0{,}043. \quad (9)$$

Détermination de μ_L. — Les pertes dues à une conductivité finie des parois de la cavité exercent une influence non seulement sur la surtension, mais aussi sur la fréquence de résonance. L'étude théorique de cet effet [8], [9] et al. donne la variation $\Delta\omega_1$ de la fréquence de résonance que provoque

l'échantillon (σ_2, μ_{L2}) autour de la fréquence ω_1 qu'on obtiendrait avec un échantillon de même σ_2, mais où $\mu_{L2} = 1$ (en pratique le même échantillon soumis à un champ très élevé provoquant la saturation) ;

$$\frac{2\Delta\omega_1}{\omega_1} = \frac{C_2}{\sqrt{\sigma_2}}.(1 - \sqrt{\mu_{L2}}) \tag{10}$$

soit

$$\sqrt{\mu_{L2}} = 1 - \frac{2\Delta\omega_1}{\omega_0}.\frac{\sqrt{\sigma_2}}{C_2} \tag{11}$$

$\Delta\omega_1$ peut être positif ou négatif.

RÉSULTATS DE MESURE

Remarques préliminaires. — Nous présentons dans ce chapitre les résultats de quelques mesures effectuées sur deux monocristaux de fer contenant 1,8 % de silicium.

Nous avons pu nous procurer des lames de tôle de ferro-silicium contenant des monocristaux, obtenus grâce à un traitement spécial effectué dans un four en soumettant les tôles à un gradient de température ainsi qu'à une contrainte mécanique (1).

Après ce traitement, nous avons découpé dans ces tôles des disques monocristallins de 23 mm de diamètre et de 0,3 mm d'épaisseur. Leur diamètre relativement grand nous a permis d'introduire les disques dans une cavité de mesure pour constituer entièrement l'une des parois terminales.

La surface des échantillons a été parfaitement polie, d'abord mécaniquement (traitement par poudre abrasive très fine), puis électrolytiquement.

Un examen radioscopique (1) nous a fourni l'orientation des axes cristallins dans les deux échantillons (*fig.* 1 et 2), orientation que nous avons d'ailleurs pu contrôler au cours de la mesure du couple d'anisotropie sur la balance magnétique.

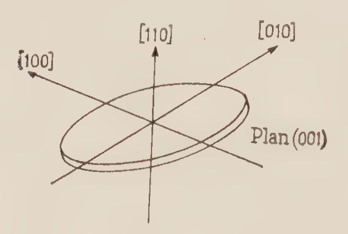


Fig. 1. — Échantillon A.

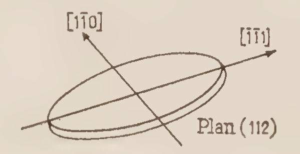


Fig. 2. — Échantillon B.

Dans le tableau suivant nous récapitulons les diverses grandeurs que nous avons utilisées dans nos calculs et dans notre discussion des résultats de nos mesures :

Grandeur	Échantillon A	Échantillon B	Origine
$\sigma\left[\frac{1}{\Omega\ \text{cm}}\right]$	2,47 10⁴	2,47 10⁴	Mesure (2)
Pourcentage de Si	1,8 %	1,8 %	Mesure (3)
K_1 [erg/cm³]	3,38 10⁵	3,38 10⁵	Mesure
N_z	0,1215	0,1215	[12]
N_y	12,307	12,307	[12]
$\frac{dW}{d\theta}$	$(K_1/2)\sin 4\theta$	$(K_1/23)(-\sin 2\theta - 7\sin 4\theta)$	A : [3] B : calculé
I_s [Oe]	1 575	1 575	[11]
N_{ex}	$(2K_1/I_s^2)\cos 4\theta$	$\theta = 0°$: $-\frac{K_1}{I_s^2}$; $\theta = 90°$: $-\frac{K_1}{I_s^2}$	A : [3] B : calculé
N_{ey}	$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right)\frac{K_1}{I_s^2}$		[3]

(1) Je remercie M. J. C. Barbier, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Grenoble, auquel je dois les échantillons, et M. le Pr F. Bertaut, qui en a effectué, avec ses collaborateurs, MM. Durif et Forrat, l'examen radioscopique.

(2) Que M. Brugel, du Laboratoire d'Électrotechnique de l'Institut Polytechnique de Grenoble, trouve ici mes remerciements pour avoir effectué ces mesures.

(3) Effectuées par le Laboratoire d'Analyses, de Recherches et d'Essais Chimiques de l'E. N. S. d'Électro-métallurgie de Grenoble.

Définition de l'angle θ. — L'angle θ dont il sera constamment question par la suite est l'angle entre le champ magnétique continu H_z appliqué (*fig.* 3)

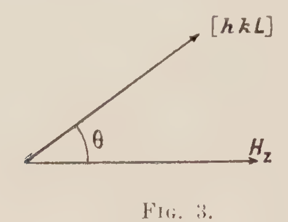


Fig. 3.

et un axe cristallin de référence [*hkl*] précisé ci-dessous :

Échantillon	Axe [*hkl*] choisi
A	[100]
B	[010]

Mesures sur la balance magnétique. — Les deux échantillons A et B ont été placés sur la balance magnétique afin de mesurer le couple d'anisotropie $C_a = \frac{dW}{d\theta}$ produit [10] dans un champ continu de 6 500 Œrstedt, suffisamment élevé pour les aimanter à saturation.

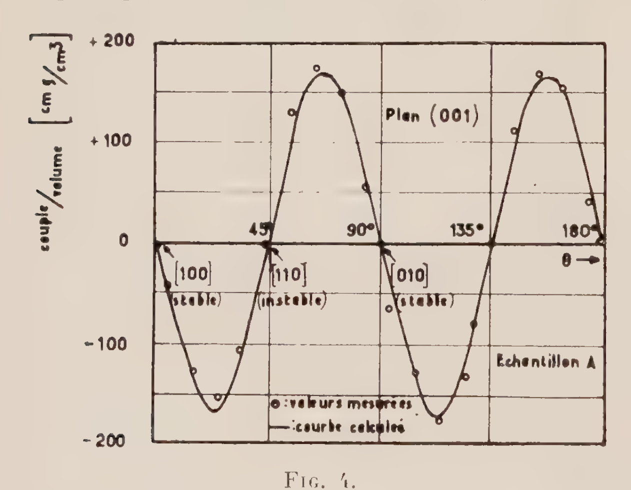


Fig. 4.

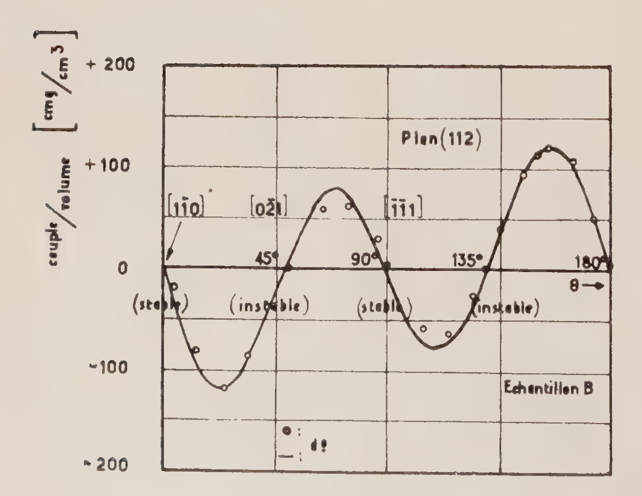


Fig. 5.

Nous avons porté les résultats sur les figures 4 et 5, où les valeurs mesurées (points) sont mises en comparaison avec les valeurs calculées (trait plein).

Le couple maximum que nous avons obtenu sur l'échantillon A nous a servi à déterminer la constante d'anisotropie K_1. En voici le résultat :

$$K_1 = 3{,}38\ 10^5 \text{ erg/cm}^3.$$

Mesures du champ de résonance $H_{zres} = f(\theta)$. — Les résultats obtenus pour l'échantillon A (analogues à ceux de Kip et Arnold [13]) sont représentés graphiquement sur la figure 6 (courbe en

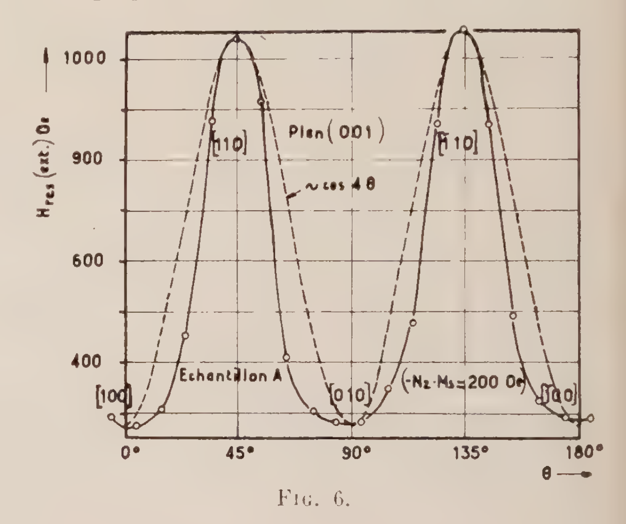


Fig. 6.

trait continu). Remarquons qu'ils ne correspondent pas aux valeurs calculées selon (1) (courbe en pointillé), sauf pour les angles $\theta = 0$, $\pi/4$, $n\pi/4$. Cela vient du fait que le champ de résonance H_{zres} est trop faible pour orienter totalement le vecteur de l'aimantation I (dont le module reste pratiquement $= I_s$) dans sa propre direction. Les angles ci-dessus font exception, car le couple d'anisotropie qui leur correspond est nul.

Nous avons calculé $H_{zres} = f(\theta)$ à partir de la relation (1), pour l'échantillon A, en employant les valeurs de N_{ex} et N_{ey} déterminées selon [3] et en posant $N_x = 0$, selon la proposition de Van Vleck [2]. Avec $g = 2{,}12$ (facteur de Landé) cela nous donne :

θ	N_{ex}	N_{ey}	H_{zres} [Oe] calculé	mesuré
0°	0,2724	0,2724	270	280
45°	— 0,2724	0,2724	1 085	1 050

Ce tableau nous indique, que pour les angles 0,

$\pi/4$, $n\pi/4$ il y a effectivement une bonne concordance entre valeurs calculées et valeurs mesurées.

Nous avons de plus essayé d'établir les valeurs des termes N_{ex} valables pour l'échantillon B :

θ	N_{ex}	H_{zres} [Oe] calculé	mesuré
0°	— 0,1815	940	930
90°	— 0,1362	850	830

Nous n'avons pas réussi à calculer N_{ey}. Mais, comme nous voyons, les valeurs de H_{zres} données par le calcul en posant $N_{ey} = 0$ correspondent assez

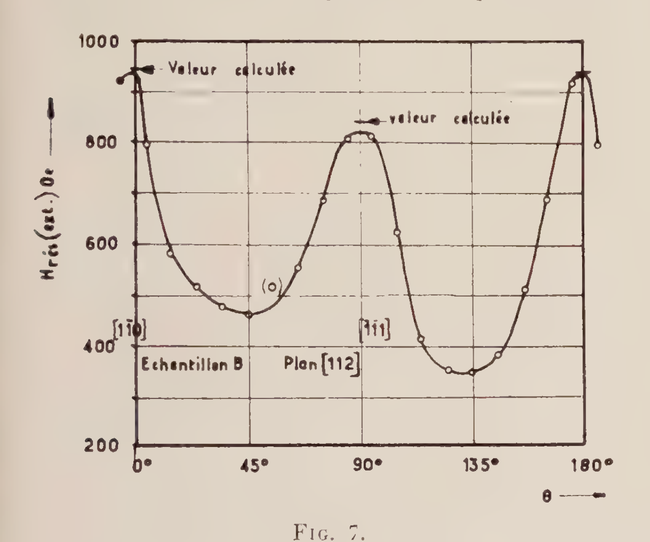


Fig. 7.

bien aux valeurs mesurées (*fig.* 7), car l'influence de N_{ey} sur la valeur du champ de résonance est très faible dans notre cas, comme on peut s'en assurer lors du calcul numérique de H_{zres}.

Mesures de la perméabilité complexe en fonction de H_z. — Résultats. — Ces mesures ont été effectuées sur l'échantillon A seulement. Les résultats

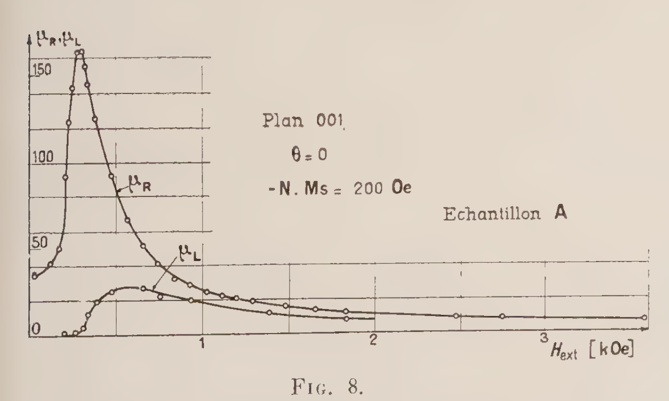


Fig. 8.

obtenus sont portés sur la figure 8 pour $\theta = 0°$, et sur la figure 9 pour $\theta = 45°$, sous forme de courbes représentant μ_R et μ_L, perméabilités apparentes.

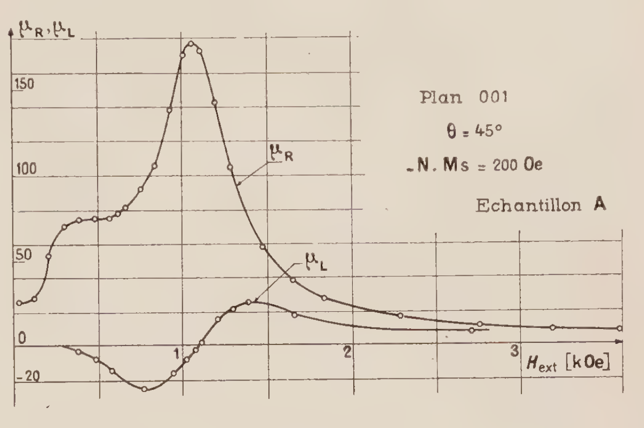


Fig. 9.

Afin de tracer les courbes théoriques de μ_R et μ_L en utilisant les relations (4) et (5), nous avons dû déterminer le paramètre de relaxation à l'aide de (6), pour $\mu_{R\max} = 170$ (moyenne de nos mesures). Nous avons obtenu :

$$1/T_2 = 14,1 \, . \, 10^9.$$

Les courbes *calculées* μ_R, μ_L pour un matériau *isotrope*, sont représentées sur la figure 10. Elles

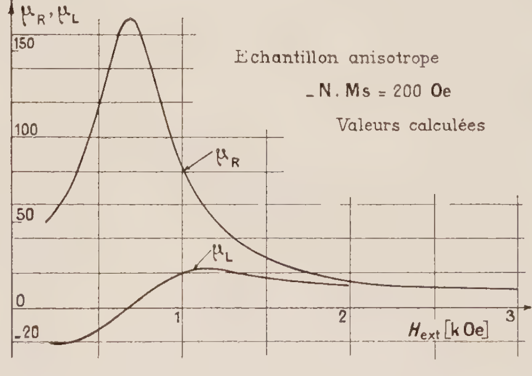


Fig. 10.

indiquent un champ de résonance de 690 Oe. La comparaison avec nos résultats de mesure sur des échantillons anisotropes (et ayant les mêmes dimensions) est facile : Il suffit de déplacer l'échelle horizontale (H_{zext}) vers la droite ou vers la gauche, jusqu'à la faire coïncider les valeurs de H_{zres} (ce déplacement correspond au champ d'anisotropie et est de l'ordre de $\pm$ 300 Oe dans notre cas).

Observons, que la concordance entre les valeurs calculées et les mesures n'est satisfaisante qu'au delà d'une certaine valeur de « seuil » $H_{z,s}$. Cela peut s'expliquer de la façon suivante : dans les équations traitant de la résonance ferromagnétique on a sup-

posé que la composante de l'aimantation de l'échantillon selon la direction du champ extérieur appliqué est l'aimantation de saturation I_s. On sait, que dans un milieu monocristallin l'aimantation est pratiquement toujours à la valeur de saturation I_s, mais qu'elle est dirigée parallèlement à un axe d'aimantation facile (100 dans notre cas), tant que le champ extérieur est faible ou nul. Pour un champ extérieur faible ayant une direction autre que celle de l'aimantation facile, l'aimantation produite dans la direction de ce champ est donc inférieure à I_s et il faut en tenir compte dans les relations théoriques, si on veut faire des comparaisons.

Supposons un monocristal à réseau cubique soumis à un champ continu H, faisant l'angle δ_0 avec une direction d'aimantation facile [*hkl*]. On suppose en plus, que le vecteur d'aimantation I_s se trouve dans le plan ([*hkl*], H) (*fig.* 11). Si H croît,

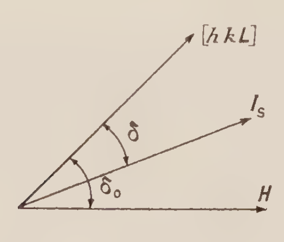


Fig. 11.

le vecteur d'aimantation quitte la direction [*hkl*] pour se rapprocher de celle de H. L'angle δ peut être calculé à partir de considérations d'énergie minimum [10], [11]. On obtient en particulier la relation :

$$H = \frac{dW/d\delta}{I_s \sin(\delta_0 - \delta)}. \quad (12)$$

La composante d'aimantation dans la direction de H sera alors :

$$I = I_s . \cos(\delta_0 - \delta). \quad (13)$$

Dans notre cas (réseau cubique) [*hkl*] est l'axe [100] et le plan (H, [*hkl*]) correspond à (001).

Selon nos calculs, on peut admettre pour le Fe-Si, que $I = I_s$ à partir de :

θ	H_{zint} [Oe]	H_{zext} [Oe]
0°	30	230
45°	330	550

Pour les faibles champs il est d'ailleurs difficile de calculer H_{zint} à partir de H_{zext} ou vice versa, car le champ de désaimantation dépend de I.

— Examen du cas $\theta = 0°$. — Ainsi que l'indique la figure 8, la courbe de résonance de μ_R n'est pas symétrique. En effet, μ_R croît plus rapidement, entre $H_{zext} = 230$ Oe et $H_{zext} = 280$ Oe, que l'on peut s'y attendre. Cela est probablement dû au fait que le champ interne (qui conditionne la résonance) ne décroît pas du tout de la même façon que le champ externe, sans compter que l'on ne sait pas non plus exactement, si le raisonnement basé sur l'existence du « champ d'anisotropie » est encore valable dans cette zone. Pour obtenir une véritable « courbe de résonance », il faudrait pouvoir représenter μ_R en fonction du champ interne. Quant à la courbe $\mu_L = f(H_{zext})$, elle se rapproche de l'axe horizontal pour les valeurs du champ inférieures à la valeur de « seuil » $H_{z,s}$, dont nous avons parlé.

Nous pouvons interpréter cela en admettant que l'énergie d'anisotropie maintient, même pour un champ externe nul, un champ interne trop élevé pour que μ_L puisse adopter des valeurs négatives (qui correspondraient à une *augmentation* de la fréquence de résonance de la cavité, donc à des effets d'anomalie).

— Examen du cas $\theta = 45°$. — Nous avons vu, qu'en général, pour des valeurs suffisamment faibles du champ continu H_{zext}, le vecteur d'aimantation n'est pas situé dans la direction de H_{zext}.

Quelles en sont les conséquences pour la courbe $\mu_R = f(H_{zext})$ dans notre cas $\theta = 45°$?

De toute façon, tant que I_s et H_{zext} ne sont pas dans la même direction, les conditions pour la résonance ferromagnétique s'obtiendront en introduisant *la composante I de I_s en direction de H_{zext}* dans la formule (1). Par conséquent, la courbe $\mu_R = f(H_{zext})$ présentera des écarts par rapport à une courbe où I_s est toujours situé en direction de H_{zext} ($\theta = 0°$). En particulier les valeurs réelles de I et de H_{zint} peuvent bien avant la « véritable » résonance se rapprocher des conditions de résonance, puis s'en éloigner à des champs plus élevés mais toujours inférieurs au champ qui produit ensuite la véritable résonance.

Précisons ceci quantitativement sur un exemple, pour $\theta = 45°$: On constate d'ailleurs par le calcul, que pour les très faibles champs, l'angle ($45° - \delta$) dont I_s a tourné reste petit, à cause du couple d'anisotropie alors très élevé.

Supposons que le champ *interne* régnant dans l'échantillon A (en direction de [110]) soit de $H_{int} = 150$ Oe. Les relations (12) et (13) nous autorisent à écrire :

$$\sin(45° - \delta) = 0{,}7 \sin 4\delta$$

d'où

$$\delta = 12{,}5°$$

et

$$I = 1\,575 \text{ G} . \cos 32{,}5° = 1\,330 \text{ G}.$$

Nous pouvons ainsi déterminer le champ extérieur H_{zext} qui crée un champ interne de 150 Oe. Il est de 310 Oe. Dans ces conditions, le vecteur

d'aimantation I_s a tourné de l'angle $\delta = 12{,}5^\circ$ et le champ *interne* nécessaire pour produire la résonance ferromagnétique dans cette direction de $\delta = 12{,}5^\circ$, est calculable grâce à l'équation (1). Avec $N_{ex} = 0, N_{ey} = 0{,}248$:

$$\underline{H_{\text{int,res}}\ (\delta = 12{,}5^\circ) = 200\ \text{Oe}}$$

alors que le champ interne réellement appliqué dans la direction [110] est de

$$H_{\text{int}}\ (12{,}5^\circ) = 150 \cos (37{,}5^\circ) = 119\ \text{Oe}.$$

Nous avons également étudié le cas où le champ interne appliqué dans la direction [110] est de 200 Oe au lieu de 150 Oe.

Ces différents résultats sont résumés ci-après :

Direction [110]			Direction δ		Écart
H_{int}	H_{ext}	θ	$H_{\text{int,réel}}$	$H_{\text{int,res}}$	$H_{\text{int,réel}} - H_{\text{int,res}}$
150 Oe	310 Oe	12,5°	119 Oe	200 Oe	80 Oe
200 Oe	367 Oe	16,0°	175 Oe	320 Oe	145 Oe

On peut en déduire, que l'absorption pour $H_{zext} = 310$ Oe doit être plus importante que celle pour $H_{zext} = 367$ Oe, car cette première valeur est plus proche du champ nécessaire à la résonance dans la direction δ que la deuxième (écart de 80 Oe contre 145 Oe).

En effet, sur la figure 9, la courbe $\mu_R = f(H_{zext})$ présente un deuxième « pic de résonance » situé entre les valeurs de $H_{zext} = 300$ Oe et $H_{zext} = 350$ Oe, donc à un champ insuffisant pour faire orienter totalement le vecteur d'aimantation dans la direction du champ appliqué.

— Largeur des courbes de résonance. — Lorsqu'on observe des courbes de résonance, on compare souvent leur largeur à une ordonnée égale à la moitié du maximum. Cette largeur est fonction de l'amortissement. Par exemple, nous pourrons déterminer la largeur en champ des courbes μ_R mesurée à l'ordonnée $\mu_R = \frac{1}{2} \mu_{Rmax}$. Cela n'aura manifestement un sens que pour les champs dépassant la valeur « de seuil », ce qui peut nous obliger à n'utiliser que la partie des courbes située au delà de la résonance. Nous avons ainsi trouvé une largeur de 440 Oe dans les deux cas ($\theta = 0^\circ$ et $\theta = 45^\circ$), avec une précision très réduite évidemment.

— Perméabilité a champ nul. — A champ externe nul (électroaimant éloigné de la cavité de mesure), nous avons obtenu :

θ	$\mu_R(H = 0)$	$\mu_L(H = 0)$
0°	35	17,5
45°	25	12,5

La différence entre les valeurs obtenues pour $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 45^\circ$ est probablement due au champ d'anisotropie qui, dans le premier cas, est dirigé de telle façon, qu'à champ extérieur nul le champ interne est plus près du champ de résonance que dans le second cas.

— Influence de l'état de surface de l'échantillon. — Nous avons constaté que l'état de surface de l'échantillon n'exerce aucune influence notable sur la forme des courbes. Par contre, les valeurs absolues de la perméabilité apparente (donc aussi de la perméabilité complexe) en dépendent considérablement. Ainsi nous avons effectué des mesures sur les échantillons A et B, après les avoir laissé s'oxyder en atmosphère normale, pendant quelques mois. Nous avons trouvé des valeurs de μ_{Rmax} faibles, de l'ordre de 25. De même, les variations de fréquence observées étaient beaucoup plus petites (les largeurs de courbe sont cependant restées les mêmes, ainsi que la valeur de champ de résonance). Il nous a suffi de polir à nouveau nos échantillons avec un peu de poudre abrasive (pendant 10 minutes à peine) pour obtenir les résultats que nous avions eu avant l'oxydation des échantillons.

Cette diminution de μ_R et de μ_L est sans doute due à une moindre pénétration du champ magnétique en raison de l'oydation de la surface.

En conclusion nous pouvons nous fier aux valeurs numériques retenues pour μ_R et μ_L avec des échantillons correctement polis. Nous avons pratiquement atteint les mêmes valeurs avec un échantillon poli à la poudre abrasive puis avec le même échantillon ayant subi un polissage électrolytique beaucoup plus fin. Toute amélioration éventuelle du polissage (si elle était possible) ne modifierait donc pas les valeurs de μ_R et de μ_L.

Appareillage de mesure. — La figure 12 donne le schéma de l'installation complète que nous avons réalisée, pour les mesures UHF. Grâce à quelques modifications de détail elle nous a permis d'effectuer toutes les mesures et observations nécessaires à cette étude, en particulier :

— La mesure *absolue* de la surtension à vide d'une cavité résonnante, par l'intermédiaire du coefficient de réflexion et du taux d'ondes stationnaires.

— La mesure des *variations* de surtension.

— La mesure de la fréquence de résonance d'une cavité et de ses variations.

Quant à la première de ces trois tâches, nous avons déjà donné les détails antérieurement [14], [15]. Un klystron de très haute stabilité et un ondemètre à absorption très précis ont été nécessaires.

Pour la mesure des variations de la surtension,

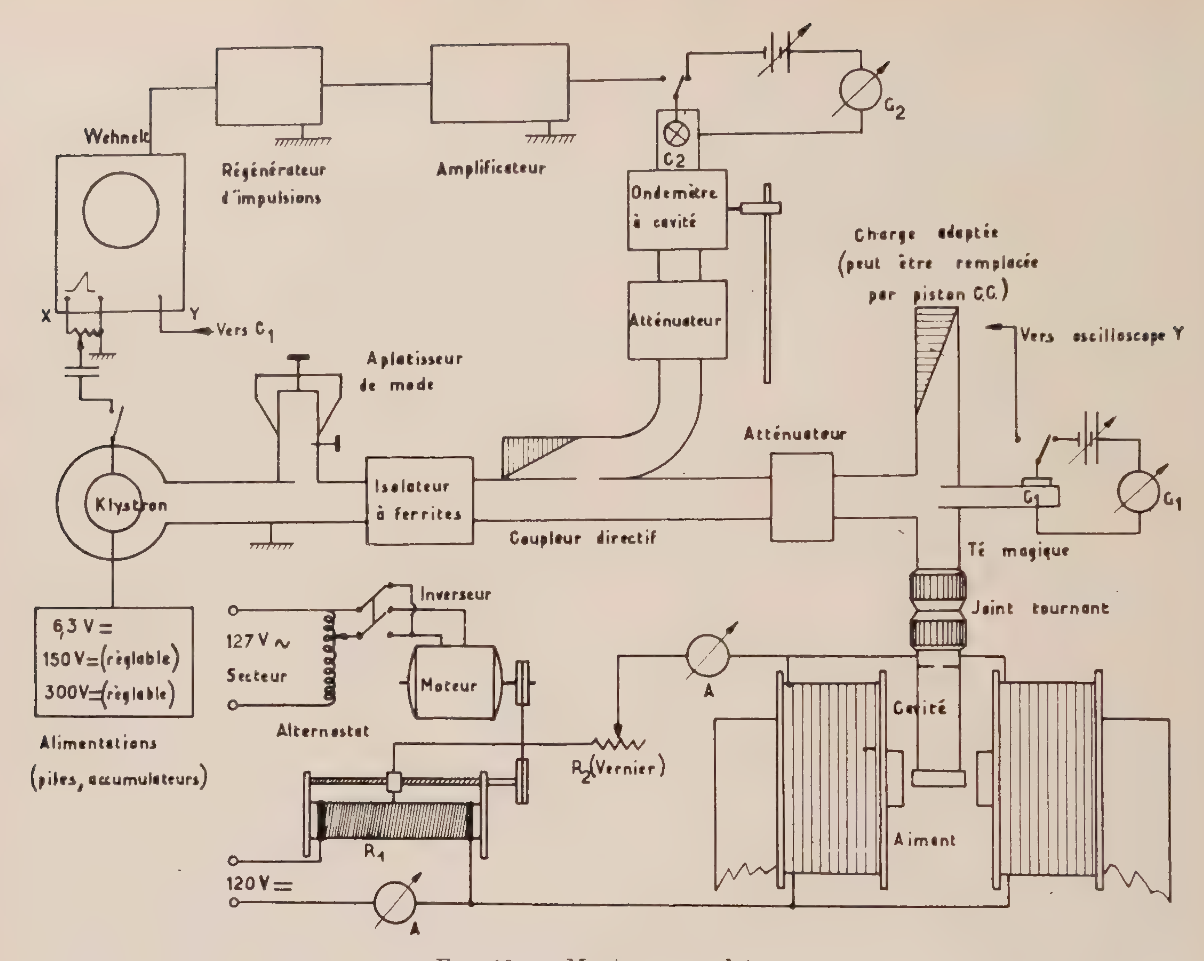


Fig. 12. — Montage complet.

autour d'une valeur de référence Q_0, nous avons utilisé la relation :

$$Q_i = Q_0 \cdot \sqrt{\frac{i_{1i}}{i_{10}}} \qquad (14)$$

où Q_i est la surtension inconnue. Les grandeurs i_{1i} et i_{10} représentent les valeurs du courant détecté dans le cristal C_1 (à courbe de réponse quadratique), correspondant à Q_i et Q_0. Cette relation n'est évidemment valable que si la puissance incidente à la cavité reste constante (contrôle avec G_2). La valeur absolue de la fréquence de résonance, f_{res}, peut être mesurée à l'aide de n'importe quel ondemètre, la précision exigée sur f_{res} étant relativement réduite.

Les variations Δf_{res} à mesurer sont très faibles par rapport à la fréquence de résonance (dans notre cas : $\Delta f_{res} = 20$ à 200 kHz, soit $\frac{\Delta f_{res}}{f_{res}} = 2.10^{-6}$ à 20.10^{-6}). Il n'est donc pas possible de les mesurer en observant l'accord d'un ondemètre à cavité résonnante sur un galvanomètre. Nous avons eu recours à des méthodes dans lesquelles le klystron est modulé en fréquence et un signal proportionnel à la puissance absorbée (fourni par C_1) est envoyé sur un oscilloscope.

L'ondemètre à absorption de très haute qualité, placé dans la branche du cristal détecteur C_2, fournit une impulsion à la sortie de C_2, au passage par la fréquence d'accord de l'ondemètre (dans chaque cycle de modulation). Cette impulsion est amplifiée, transformée en signal étroit à front raide et de forme constante, puis injectée sur le Wehnelt de l'oscilloscope d'observation, qui nous fournit ainsi des courbes de résonance portant un point d'extinction sur la pointe, quand l'ondemètre est accordé à la fréquence de résonance de la cavité de mesure. Les variations de fréquence peuvent être lues avec une bonne précision grâce à une aiguille de 700 mm de longueur, amplifiant les déplacements de la vis micrométrique (1 mm $\cong$ 16 kHz) de l'ondemètre, étalonné au préalable en écarts de fréquence.

Précision. — Tout d'abord, dans la mesure absolue des surtensions, la précision dépend essentiel-

lement des erreurs dues à une réponse non quadratique du cristal détecteur C_1.

La précision du dispositif destiné à mesurer les variations de surtension est probablement limitée de même par la réponse du cristal détecteur, alors que pour la mesure de f_{res} on doit surtout prendre en considération l'erreur de l'ondemètre.

Les erreurs qui interviennent sur μ_R et μ_L sont assez difficiles à chiffrer. Il serait à la rigueur possible de se faire une image de l'ordre de grandeur de la précision en considérant l'équation (8). Selon les calculs que nous avons effectués on peut compter sur une précision de l'ordre de 10 % pour μ_R et μ_L.

Manuscrit reçu le 21 novembre 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Kittel (C.), *Phys. Rev.*, 1946, **70**, 281-291.
[2] Van Vleck (J. H.), *Physica*, 1951, **17**, 234-252.
[3] Kittel (C.), *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 155-161.
[4] Kittel (C.), Introduction to Solid State Physics, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1956 (second edition).
[5] Landau (L.) et Lifschitz (E.), *Phys. Z. S. U.*, 1935, **8**, 153-169.
[6] Bloembergen (N.), *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 572-580.
[7] Reich (K. H.), *Frequenz*, 1955, **9**, 299-325.
[8] Slater (J. C.), Microwave Electronics, D. Van Nostrand Cie, Inc. N. Y., 1950.
[9] Muller (J.), Hochfrequenz und Elektroakustik, 1939, **54**, 157-161.
[10] Becker (D.) et Döring (W.), Ferromagnetismus, Springer, Berlin, 1939.
[11] Bozorth (R. M.), Ferromagnetism, Van Nostrand, New York, 1951.
[12] Osborn (J. A.), *Phys. Rev.*, 1945, **67**, 351-357.
[13] Kip (A. F.) et Arnold (R. D.), *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1556-1560.
[14] Strub (A. S.), Archives des Sciences 10 (numéro spécial), 1957, 142-146.
[15] Strub (A. S.), *J. Physique Rad.*, 1959 avril, **20**, 42 A-43 A.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM
PHYSIQUE APPLIQUÉE

SUPPLÉMENT AU N° 3.
TOME 21, MARS 1960, PAGE 52 A.

MESURE DES RÉSISTANCES ÉLECTRIQUES ÉLEVÉES A L'AIDE D'UNE CHAMBRE D'IONISATION UTILISÉE COMME SOURCE DE COURANT

Par DANIEL BLANC et ERIC FORT,
Centre de Physique Nucléaire, Faculté des Sciences de Toulouse.

ROBERT LACOSTE et JEAN LAGASSE,
Laboratoire d'Électrotechnique et d'Électronique Industrielle, E. N. S. E. E. H. T., Toulouse.

Résumé. — Il devient très difficile de mesurer, avec une bonne précision, les résistances électriques élevées, lorsque leurs valeurs dépassent 10^{12} ohms, et que l'on fait appel à une méthode classique, comme celle de l'ampèremètre et du voltmètre. Nous décrivons une méthode utilisant une chambre d'ionisation, fonctionnant comme une source de courant, et placée en série avec la résistance inconnue : la valeur de cette résistance se déduit de la tension entre ses bornes, mesurée par un montage électrométrique.

La chambre d'ionisation est remplie d'air ou d'argon ; ses électrodes sont deux plateaux parallèles, dont il est possible de faire varier la distance. Le courant d'ionisation constant, débité par l'appareil, est créé par une couche mince de bioxyde d'uranium, déposée sur l'un des plateaux. En modifiant la pression de remplissage, il est possible de faire varier de façon continue le courant d'ionisation ; sa valeur maximum est de $2,7.10^{-11}$ ampère, sous la pression atmosphérique.

Notre méthode permet de mesurer, avec une précision excellente, les résistances de faibles valeurs par rapport à la résistance interne ρ de la chambre ($\rho = \Delta V/\Delta i$). Sous la pression atmosphérique, ρ est de l'ordre de 10^{15} ohms ; pour un remplissage d'air sous la pression de 2 cm de mercure, ρ atteint 10^{16} ohms. Finalement, avec la chambre d'ionisation décrite, la limite supérieure des résistances mesurables avec précision est de 10^{14} ohms.

Abstract. — The accurate measurement of high electric resistances is very difficult when their values are above 10^{12} ohms, and, if a classic method is used, for instance ammeter and voltmeter. We describe a method using an ionization chamber, acting like a current source, put into series with the unknown resistance ; we calculate the value of this resistance from the voltage between its terminals, measured with an electrometer.

The ionization chamber is filled with air or argon ; its electrodes are two parallel plates, which spacing can be varied. Constant ionization current supplied by the system is provided by a thin layer of uranium dioxide, deposited on one side of a plate. If the filling pressure is modified, the ionization current can be continuously varied ; its maxima value is 2.7×10^{-11} ampere, under atmospheric pressure.

Our method allows measurement with great accuracy of resistances which have small values as compared to the internal resistance ρ of the chamber ($\rho = \Delta V/\Delta i$). Under atmospheric pressure, ρ is of the order of 10^{15} ohms ; with air, under a pressure of 2 cm of mercury, ρ will be 10^{16} ohms. The upper limit of resistances which can be measured accurately, with this ionization chamber, is 10^{14} ohms.

La détermination de la valeur d'une résistance électrique devient très difficile dès que le courant qui la traverse est faible — inférieur à 10^{-13} A, pour fixer les idées —, et quelle que soit la nature de cette résistance, couche métallique à structure lacunaire ou isolant proprement dit [1].

Prenons la méthode du voltmètre et de l'ampèremètre, qui est la mieux adaptée à l'enregistrement : la mesure de la tension de la source ne présente aucune difficulté, mais l'erreur sur le courant électrique atteint $\pm$ 4 %, pour une intensité de 10^{-12} A (2), en tenant compte d'un grand nombre de précautions, et notamment de la correction point par point de la valeur de la résistance étalon, aux bornes de laquelle est connecté le circuit d'entrée de l'électromètre : cette résistance varie en effet avec la différence de potentiel existant entre ses extrémités [2].

Lorsque l'intensité diminue, l'erreur croît très vite : pour des courants d'intensités inférieures à 10^{-13} A, on peut adopter deux solutions :

a) Utiliser, en série avec l'élément étudié, des résistances connues de valeurs élevées : le signal d'entrée de l'appareil de mesure peut être suffisant, mais la stabilité de telles résistances est très défectueuse lorsque l'on dépasse 10^{11} ou 10^{12} ohms [2].

b) Conserver une résistance de mesure de 10^{10} ohms : le signal d'entrée de l'électromètre devient très faible ; on peut employer un galvanomètre pour mesurer la tension de sortie lorsque cette dernière diminue trop pour être décelée par l'appareil de lecture normal ou par l'enregistreur, mais le gain du dispositif électronique est alors très mal connu [2].

On voit donc que la méthode classique conduit à des résultats difficilement controlables, dès que l'on veut mesurer des résistances de 10^{14} ohms sous quelques volts, ou de l'ordre de 10^{10} ohms et au

delà, sous des tensions plus élevées. Il est nécessaire de faire appel à une méthode basée sur un principe différent.

Principe de la méthode de la source de courant. — Ce qui précède montre qu'il faut s'affranchir de la détermination du courant, lorsque l'on mesure des résistances élevées. Il est donc intéressant d'utiliser une source de courant, c'est-à-dire une source capable de débiter une intensité constante, quelle que soit l'impédance du circuit extérieur. Connaissant cette intensité, il suffit de disposer un voltmètre aux bornes de l'élément étudié, pour déterminer la chute de tension correspondante, qui conduit à la valeur de la résistance inconnue. La résistance interne de l'appareil de mesure doit être supérieure à cette dernière, mais cela ne présente pas de difficultés lorsque l'on utilise un montage électrométrique convenable.

Une pentode à saturation très marquée pourrait constituer une source de courant, mais son emploi est délicat et l'intensité ne peut être modifiée que dans des limites assez restreintes ; de plus, sa résistance interne est très faible (inférieure à 10^{12} ohms). Nous avons préféré adopter une chambre d'ionisation, dont le débit est constant et très faible, et dont la résistance interne est particulièrement élevée.

Emploi d'une chambre d'ionisation comme source de courant. — Une chambre d'ionisation est constituée par deux électrodes entre lesquelles est établie une différence de potentiel V. Si le remplissage gazeux que contient la chambre est traversé par un flux de particules ionisantes constant dans le temps, l'ionisation du gaz, qui en résulte, se traduit par un courant i, ou courant d'ionisation.

Quelles que soient la forme géométrique et la disposition des électrodes, la nature et la pression du gaz de remplissage, la variation de i en fonction de V est toujours de la forme donnée sur la figure 1 :

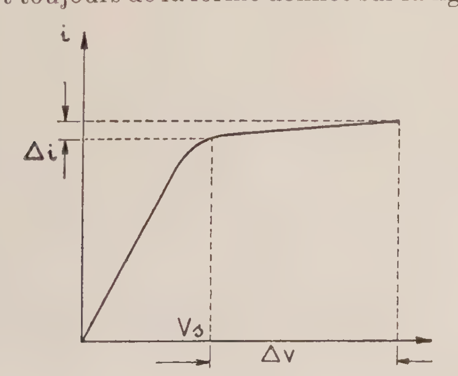


Fig. 1. — Caractéristique électrique d'une chambre d'ionisation sous irradiation constante.

au-dessus d'une tension V_s, le courant d'ionisation est presque constant ; il se forme un palier, qui s'étend jusqu'à la tension de seuil de la région de proportionnalité [3].

Pour une valeur de V donnée située dans cette zone, la chambre se comporte donc comme une source de courant, aux fluctuations statistiques près de l'ionisation, c'est-à-dire de la valeur de i, très faibles si l'on a la précaution d'utiliser une irradiation suffisamment intense.

Notons cependant, comme le montre la figure 1, que le palier $i = f(V)$ possède une faible pente ; la résistance interne :

$$\rho = \Delta V / \Delta i$$

de la chambre est toujours positive ; la valeur de ρ dépend du coefficient de recombinaison ionique, c'est-à-dire de la nature du gaz de remplissage, de la pression, de la forme des électrodes et de leur disposition. On peut donc prévoir, *a priori*, que la chambre d'ionisation, utilisée comme source de courant ne pourra être appliquée qu'à la mesure de résistances faibles par rapport à ρ.

Principe de la méthode de mesure. — R. Jaeger [4] a publié en 1929 une application de chambres d'ionisation comme sources de courant. Il s'agissait d'étalonner des dosimètres par une méthode de compensation, et selon le montage de la figure 2 : le courant à mesurer était annulé, dans la résistance R de grande valeur, par le courant débité par une chambre d'ionisation remplie d'air sous la pression atmosphérique et contenant une

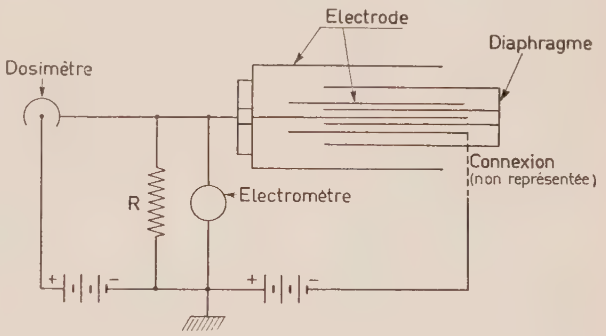


Fig. 2. — Emploi d'une chambre d'ionisation comme source de courant pour l'étalonnage de dosimètres par une méthode d'opposition [4].

source d'oxyde d'uranium. L'introduction entre les électrodes de la chambre d'un diaphragme réglable, convenablement disposé, permettait de faire varier ce courant. On vérifiait l'annulation du courant total dans la résistance R à l'aide de l'électromètre représenté sur la figure 2. Grâce à un étalonnage préalable, on savait quelle était l'intensité correspondant à la position du diaphragme pour laquelle s'annulait le courant total dans la résistance R.

La méthode de la chambre d'ionisation a été appliquée par J. Weill [5] à la mesure de résistances très élevées. Cet auteur employait une

chambre d'ionisation cylindrique, alimentée sous une tension constante de 150 volts, donnée par une pile Zamboni. La chambre était remplie d'anhydride carbonique marqué au ^{14}C, cet émetteur β créant le courant d'ionisation constant débité par l'appareil ; le courant d'ionisation le plus faible réalisé ainsi était de $2{,}56 . 10^{-11}$ ampère. J. Weill ne précise pas quelle est la limite supérieure des résistances que sa méthode permet de mesurer avec une bonne précision. De la valeur donnée plus haut du courant d'ionisation, on peut déduire que, dans les conditions les plus favorables, on est limité à la mesure des résistances inférieures à $5 . 10^{12}$ ohms. Une application pratique des études de J. Weill a été décrite par J. Bristeau [6].

En adoptant le montage électrique donné sur la figure 3, nous nous sommes efforcés de nous placer dans des conditions opératoires plus favorables [7] : nous déduisons le courant d'ionisation i de la chute de tension v aux bornes d'une résistance étalon R_e (voisine de 10^9 ohms) ; v étant donnée par un électromètre type « Vibron », la précision sur la mesure de i est toujours meilleure que 1 %. Connaissant i, nous mesurons la chute de tension aux bornes de la résistance inconnue R_x, et nous en déduisons la valeur de R_x.

Caractéristiques de la chambre d'ionisation réalisée. — On trouvera sur la figure 4 une vue en coupe de la chambre d'ionisation : c'est un système de deux électrodes planes parallèles, en laiton,

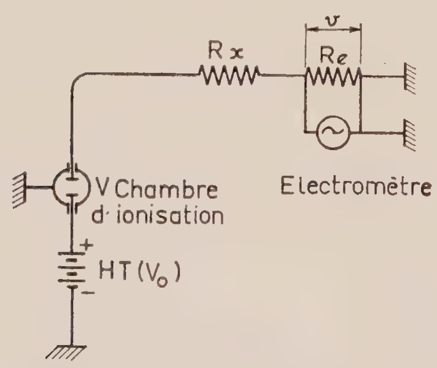


Fig. 3. — Mesure de résistances électriques élevées à l'aide d'une chambre d'ionisation utilisée comme source de courant [7].

plongée dans une enceinte cylindrique taillée dans un rondin de duralumin. L'électrode supérieure constitue le système collecteur : elle est prolongée par un cylindre de laiton qui assure le collectage de la plus grande partie des charges produites par l'ionisation créée par la source radioactive, placée sur l'électrode inférieure, mobile. Les passages isolants, en téflon, ont été calculés pour que les résistances de fuite, en volume, soient supérieures à 10^{17} ohms.

Deux ouvertures circulaires diamétralement opposées (*fig.* 4), permettent de mettre l'enceinte en communication avec un groupe de pompage

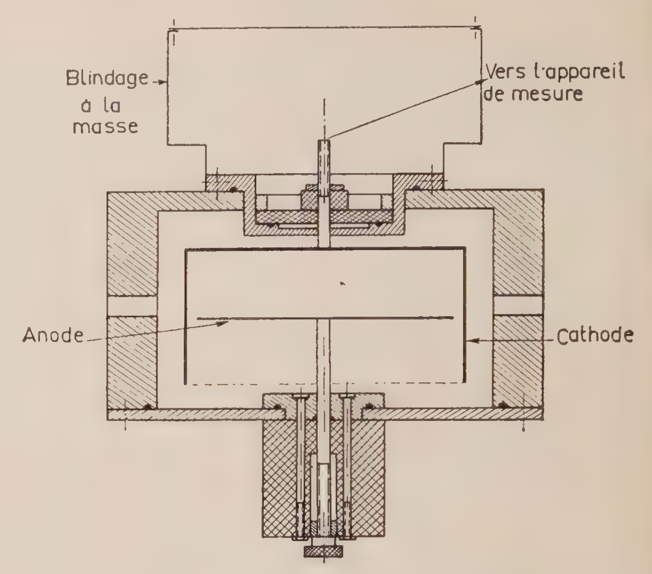


Fig. 4. — Coupe de la chambre d'ionisation à électrodes planes parallèles.

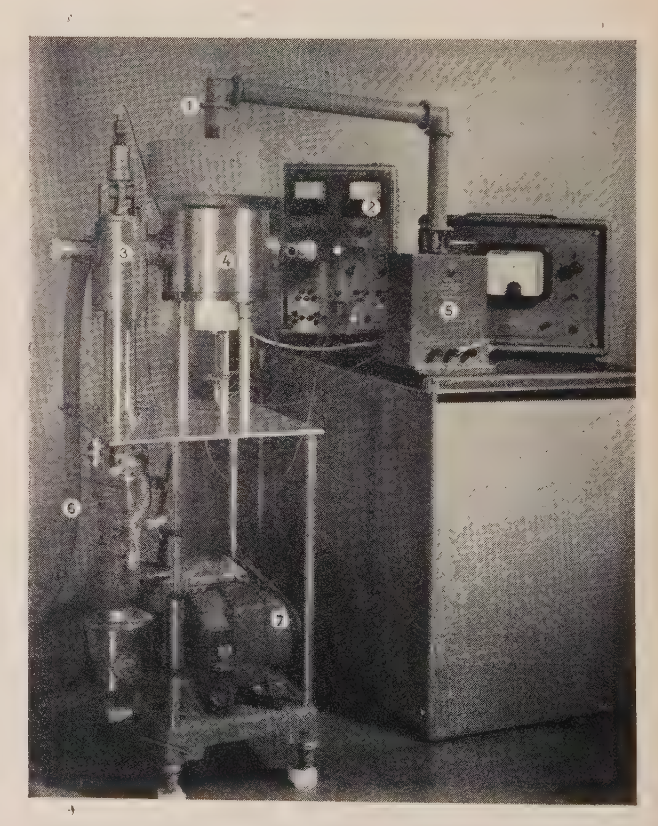


Fig. 5 (Photo YAN). — Montage expérimental d'étude de la chambre d'ionisation.

1. Circuit blindé de mesure. — 2. Source de tension V_0. — 3. Jauge de vide. — 4. Chambre d'ionisation. — 5. Électromètre. — 6. Conduit de remplissage (argon). — 7. Groupe de pompes à vide.

(pompe à palettes et pompe à diffusion d'huile), ou avec une bouteille d'argon comprimé.

La source radioactive d'intensité constante est une couche mince de bioxyde d'uranium naturel, déposée sur la face supérieure de l'électrode mobile et protégée par une pellicule de collodion ; cette source occupe une surface de 7 cm² ; son activité est voisine de 0,3 microcurie.

La figure 5 représente le montage expérimental d'étude de la chambre. On aperçoit le groupe de pompage, l'enveloppe cylindrique de la chambre, l'alimentation stabilisée fournissant la tension entre les électrodes, et l'électromètre.

1° Courant d'ionisation *i*. — Le courant d'ionisation a été déterminé par la mesure de la différence de potentiel v aux bornes d'une résistance connue $R_e = 1{,}15 . 10^9$ ohms (*fig.* 3). La figure 6

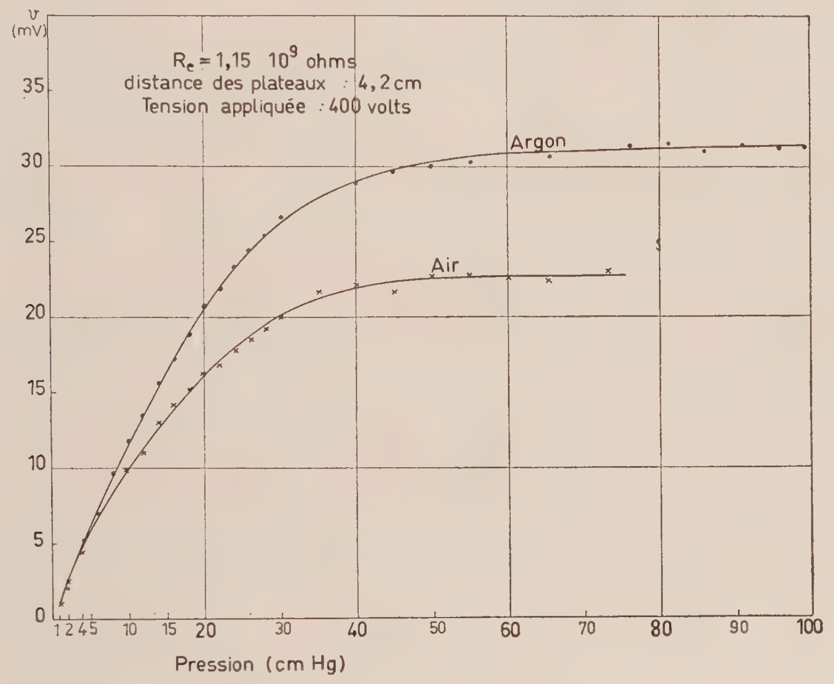


Fig. 6. — Variation du courant d'ionisation en fonction de la pression.

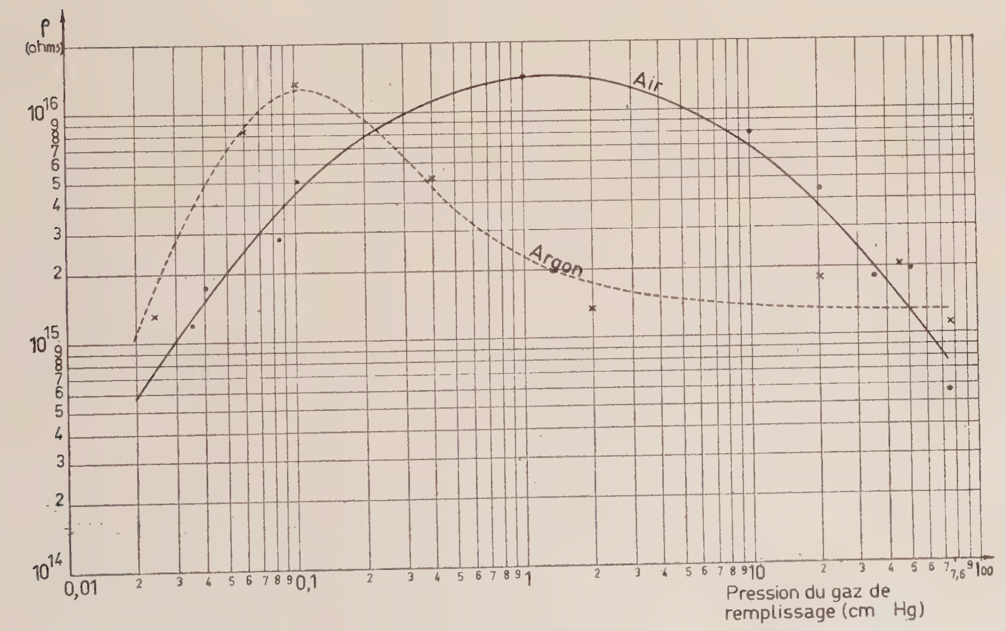


Fig. 7. — Variation, en fonction de la pression, de la résistance interne de la chambre, pour l'air et pour l'argon.

donne, en fonction de la pression, les résultats obtenus avec l'air et l'argon, et une tension appliquée $V_0 = 400$ volts, la distance entre les électrodes étant de 4,2 cm. La différence de potentiel v, donc le courant d'ionisation, tendent vers des valeurs constantes lorsque la distance des électrodes devient supérieure au parcours des particules alpha de l'uranium, pour la pression à laquelle est maintenu le gaz.

Par variation de la pression, nous réalisons ainsi une source de courant dont le débit peut être modifié à volonté dans une gamme de valeurs très large ; nous pouvons ainsi amener, avec précision, le courant d'ionisation à une valeur prédéterminée.

2° Résistance interne de la chambre. — Comme nous l'avons indiqué plus haut, la chambre ne permet de mesurer que des résistances faibles par rapport à sa résistance interne : là se trouve la limitation pratique de la méthode. Il faut donc se placer dans des conditions telles que la pente $\Delta i/\Delta v = 1/\rho$ de la caractéristique (*fig.* 1) soit aussi faible que possible.

La figure 7 donne la variation de la résistance interne de la chambre en fonction de la pression, pour l'air et l'argon : ρ passe par un maximum pour une pression comprise entre 1 et 2 cm de mercure dans le cas de l'air, égale à 1 mm de mercure dans le cas de l'argon. Les valeurs maximales de ρ sont pratiquement identiques ; à ce point de vue, l'argon ne présente aucun avantage sur l'air : des remplissages d'air sous des pressions comprises entre 1 et 2 cm de mercure constituent donc les solutions les meilleures.

Résultats obtenus dans la mesure des résistances. — 1° Gaz sous la pression atmosphérique. — Pour nous fixer un point de référence, nous avons d'abord considéré le cas où les gaz sont à la pression atmosphérique. Il est évident que la mesure n'a un sens que si la chambre d'ionisation se comporte comme une source de courant ; c'est pourquoi nous avons tracé la famille des caractéristiques $i = f(V_0)$ en employant des valeurs croissantes et connues de la résistance R_x (*fig.* 3). La figure 8 résume nos résultats :

a) Pour l'air, $\rho \# 5.10^{14}$ ohms : i reste sensiblement constant jusqu'à $R_x = 10^{13}$ ohms, mais, pour des résistances plus élevées, sa valeur tombe rapidement ; c'est ainsi que, pour $R_x = 10^{14}$ ohms, elle n'est plus que le (1/15e) de sa valeur normale.

b) Pour l'argon, $\rho \# 10^{15}$ ohms. Les résultats, bien qu'un peu améliorés, conduisent à une valeur limite de R_x presque identique.

Dans ces conditions, la chambre d'ionisation permet de mesurer des résistances allant jusqu'à 10^{13} ohms.

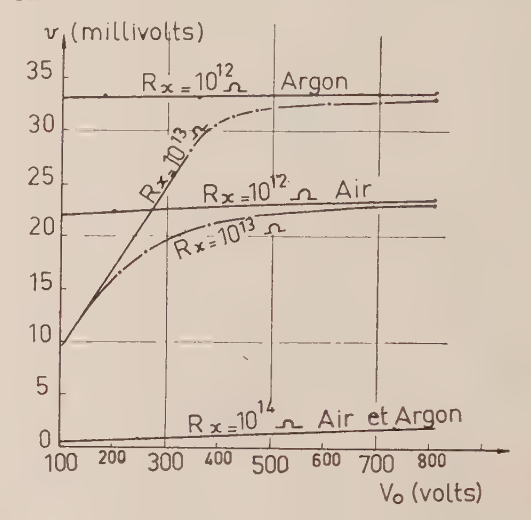


Fig. 8. — Caractéristique électrique de la chambre d'ionisation pour diverses valeurs de la résistance de charge R_x (pression atmosphérique).

2° Air sous la pression de 2 cm de mercure. — Nous nous trouvons ici dans les conditions optimales (ρ voisine de 10^{16} ohms). En utilisant le montage de la figure 3, le courant d'ionisation est de 2.10^{-12} ampère pour une résistance $R_x = 10^{14}$ ohms, alors que sa valeur est de $2{,}2.10^{-12}$ ampère pour une résistance beaucoup plus faible : la chambre d'ionisation permet de mesurer les résistances allant jusqu'à 10^{14} ohms avec une précision meilleure que 10 %. Ce sont alors les résistances superficielles des passages isolants qui deviennent gênantes.

Conclusion. — La méthode exposée ici permet d'aller beaucoup plus loin dans la mesure précise des résistances de grande valeur que ne le permettent les méthodes classiques.

La limite pratique que nous donnons ici correspond à une chambre de forme géométrique donnée. Il est peut être possible d'améliorer les performances en modifiant la géométrie du détecteur, et nous poursuivons nos travaux dans cette direction.

Manuscrit reçu le 25 janvier 1960.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lacoste (R.), *C. R. Acad. Sc.*, 1956, **243**, 1609 ; *C. R. Acad. Sc.*, 1959, **248**, 655.
[2] Lacoste (R.), Contribution à l'étude de la conductibilité des isolants solides. Thèse de Doctorat ès Sciences, Toulouse, 1959.
[3] Blanc (D.), Détecteurs de particules ; compteurs et scintillateurs, Masson, édit., Paris, 1959.
[4] Jaeger (R.), *Z. Physik*, 1929, **52**, 627.
[6] Weill (J.), Technique du contrôle des réacteurs nucléaires, Thèse d'Ingénieur-Docteur, Paris, 1953 ; rapport C. E. A. n° 323, p. 32 ; cours de Génie Atomique, 1955 : contrôle des piles, techniques diverses, p. 4.
[6] Bristeau (J.), *L'Onde Électrique*, 1955, **335-337**, 220.
[7] Blanc (D.), Fort (E.), Lacoste (R.) et Lagasse (J.), *C. R. Acad. Sc.*, 1959, **248**, 2984.

MESURE DU TENSEUR DE PERMÉABILITÉ DES FERRITES A 3 000 ET 8 500 MÉGACYCLES PAR SECONDE

Par F. DACHERT et A. SCHMOUCHKOVITCH,
Compagnie Générale de T. S. F.,
Département de Physique Appliquée, Corbeville par Orsay (S.-et-O.).

Résumé. — On décrit dans cet article un appareillage destiné à la mesure des tenseurs de perméabilité des ferrites à 3 et 10 cm de longueur d'onde. Le dispositif utilisé à 10 cm est original. On donne à titre d'exemple les résultats de séries de mesures faites à 3 000 et 8 500 Mc/s sur des ferrites de manganèse-magnésie.

Abstract. — This article describes apparatus for the measurement of the permeability tensor of ferrites at wavelengths of 3 and 10 cm. The device used at 10 cm is novel. As an example, results are given of a series of measurements made at 3 000 and 8 500 Mc/s on manganese-magnesia ferrites.

Introduction. — Des mesures du tenseur de perméabilité des ferrites en hyperfréquences ont été décrites par plusieurs auteurs [1], [2], [3]. Les résultats publiés jusqu'ici font état d'expériences faites à 3 cm de longueur d'onde. Le domaine d'application des ferrites s'étendant à des fréquences de plus en plus basses, il nous a paru intéressant d'étudier comment évoluent en fonction de la fréquence les différentes composantes du tenseur de perméabilité. Nous donnons ici les résultats de séries de mesures faites à 3 000 et 8 500 mégacycles par seconde sur les mêmes variétés d'échantillons de ferrites.

Principe de la mesure. — Si l'on prend pour axe des z un axe parallèle au champ statique $\mathcal{H}_0$ les tenseurs de susceptibilité $\bar{\bar{\chi}}$ et de perméabilité $\bar{\bar{\mu}}$ du ferrite s'écrivent en adoptant des unités rationnalisées.

$$\bar{\bar{\mu}} = \begin{Vmatrix} \mu & -jk & 0 \\ jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{Vmatrix} \qquad \bar{\bar{\chi}} = \begin{Vmatrix} \chi & -jk & 0 \\ jk & \chi & 0 \\ 0 & 0 & \chi_z \end{Vmatrix}$$

$\bar{\bar{\mu}}$ et $\bar{\bar{\chi}}$ étant liés par :

$$\bar{\bar{\mu}} = \bar{\bar{1}} + \bar{\bar{\chi}}. \tag{2}$$

Pour déterminer $\bar{\bar{\mu}}$ il faut mesurer les 3 grandeurs μ, k, μ_z qui sont fonction de l'intensité du champ magnétique statique $\mathcal{H}_0$. μ, k, μ_z sont des grandeurs complexes :

$$\begin{aligned} \mu &= 1 + \chi = \mu' - j\mu'' \\ k &= k' - jk'' \\ \mu_z &= \mu_z' - j\mu_z''. \end{aligned} \tag{3}$$

Six séries de mesures sont donc théoriquement nécessaires pour déterminer entièrement le tenseur de perméabilité. En fait μ_z étant toujours voisin de l'unité on s'est limité à la mesure de $\mu'\mu''$, $k'k''$.

La détermination du tenseur $\bar{\bar{\chi}}$ se fait par une méthode de perturbation : on place une sphère de ferrite dans une cavité en un maximum de champ magnétique hyperfréquence. La sphère est suffisamment petite vis-à-vis de la longueur d'onde pour que l'on puisse supposer l'amplitude du champ magnétique constante dans tout le volume de la sphère. La cavité est placée entre les pièces polaires d'un électro-aimant de façon que l'échantillon de ferrite soit soumis en plus du champ haute fréquence de la cavité à un champ magnétique statique dirigé perpendiculairement au plan de polarisation du champ de haute fréquence.

Calcul de perturbation. — Afin de séparer les effets électriques et magnétiques, la sphère de ferrite est placée dans une région où le champ électrique est nul et le champ magnétique maximum. Dans ces conditions, un calcul de perturbation exposé dans la référence [1] montre que la fréquence de résonance $\omega/2\pi$ de la cavité perturbée est donnée par la formule :

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{-\int_{\Delta v} \overline{H}_0 \,\bar{\bar{\chi}}\, \overline{H}_0^* \,\mathrm{d}\tau}{2\int_V H_0^2 \,\mathrm{d}\tau} \tag{4}$$

en désignant par $\overline{H}_0$ et ω_0 le champ magnétique et la fréquence de résonance de la cavité non perturbée, Δv le volume occupé par l'échantillon de ferrite, V le volume de la cavité. H_0^* est le complexe conjugué de H_0.

L'expression $\overline{H}_0 \bar{\bar{\chi}} \overline{H}_0^*$ fait intervenir le tenseur $\bar{\bar{\chi}}$.

Les vecteurs propres du tenseur de susceptibilité sont les vecteurs (1, i, 0), (1, — i, 0), (0 0 1). Le vecteur (1, i, 0) représente une onde polarisée circulairement à droite, la valeur propre associée

est $\chi + k$ que l'on désigne par χ^+. Au vecteur (1, — i, 0) qui correspond à une onde polarisée à gauche, est associé la valeur propre $\chi - k$ que l'on désigne par χ^-.

Si $\overline{H}_0$ est un vecteur propre $H_0^\pm$ de valeur propre $\chi^\pm$

$$\overline{\overline{\chi}} H_0^\pm = \chi^\pm H_0^\pm$$

et

$$\overline{H}_0 \overline{\overline{\chi}} \overline{H}_0^* = \chi^\pm |H_0^2|. \quad (5)$$

Une mesure de la qualité de la cavité successivement en polarisation droite et gauche, va nous donner les valeurs propres du tenseur $\overline{\overline{\chi}}$ qui se trouve ainsi parfaitement déterminé.

Remarque. — On peut se demander si en utilisant une onde polarisée rectilignement, il ne serait pas possible de déterminer les éléments du tenseur de perméabilité. Si H_0 est polarisé rectilignement, l'expression (5) s'écrit :

$$H_0 \overline{\overline{\chi}} H_0^* = \chi |H_0|^2. \quad (6)$$

Le tenseur $\overline{\overline{\chi}}$ étant antisymétrique, l'élément non diagonal k disparaît dans l'expression (6).

Plus généralement dans le cas d'une onde polarisée elliptiquement l'expression (5) s'écrit :

$$H_0 \overline{\overline{\chi}} H_0^* = \chi[H_x^2 + H_y^2] + 2k[H_x H_y \sin \varphi]. \quad (7)$$

L'examen de la formule (7) montre la simplification introduite par l'utilisation d'une onde polarisée circulairement $[H_x = H_y, \varphi = \pm \pi/2]$. Dans ce cas la formule (4) devient :

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{- H_m^2 [\chi \pm k] \Delta v}{2 \int_V H^2 \, d\tau} = \eta(\chi \pm k) \Delta v. \quad (8)$$

Comme le volume Δv de l'échantillon de ferrite est très petit il est légitime de supposer le champ H_0 constant dans tout le volume de l'échantillon et égal à sa valeur maximum H_m. On pose :

$$\eta = \frac{H_m^2}{2 \int_V H^2 \, d\tau}.$$

Pour séparer dans l'équation (7) les parties réelles des parties imaginaires, on écrit :

$$\omega = \omega_r + j \, \omega_r / 2Q. \quad (10)$$

On trouve alors :

$$\Delta \omega_r^\pm / \omega_r = - \eta \Delta v (\chi' \pm k') \quad (11)$$

$$\Delta (1/2Q) = \eta \Delta v (\chi'' \pm k''). \quad (12)$$

Dans le cas du mode TE_{111} utilisé :

$$\eta = \frac{26{,}316}{[(\pi^2 D^2 / L^2) + 1{,}356] \, L^3} \quad (13)$$

L = longueur de la cavité, D = diamètre de la cavité.

Calcul de la qualité Q de la cavité à partir de la puissance réfléchie. — Le pouvoir réflecteur R de la cavité est déterminé de la façon suivante : Soit P_0 la puissance réfléchie par un court-circuit, elle est détectée par un cristal qui fonctionne en détecteur quadratique, on lit sur un galvanomètre la déviation α_0.

Sans rien changer au montage, on remplace le court-circuit par la cavité de mesure. La puissance réfléchie est P la déviation du galvanomètre α

$$\alpha / \alpha_0 = P / P_0 = |R|^2. \quad (14)$$

Pour déduire de $|R|^2$ les pertes magnétiques, nous partons de la formule classique donnant l'impédance d'une cavité au voisinage de la résonance.

$$Z = \frac{1/Q_e}{\frac{1}{Q_0} + j \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)} \quad (15)$$

Q_0 facteur de qualité dû aux pertes et Q_e celui dû au couplage de la cavité à la ligne d'impédance caractéristiques Z_0 — Z est l'impédance normalisée par rapport à Z_0.

Z et R sont liés par :

$$R = (Z - 1)/(Z + 1). \quad (16)$$

On en déduit :

$$|R|^2 = 1 - (1 - R_m^2)/(1 + 4Q^2 X^2) \quad (17)$$

après avoir posé :

$$1/Q = (1/Q_0) + (1/Q_e) \quad (18)$$

en supposant $Q_e < Q_0$

$$R_m = (Q_0 - Q_e)/(Q_0 + Q_e) \quad (19)$$

et

$$(\omega/\omega_0) - (\omega_0/\omega) = 2X. \quad (20)$$

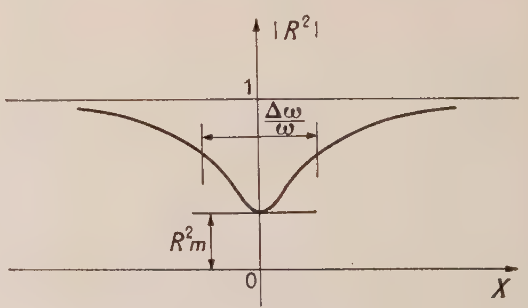


Fig. 1. — Variation du coefficient de réflexion en fonction de la désadaptation.

On a tracé (*fig.* 1) la représentation graphique de la fonction $|R|^2$. On mesure $|R_m|^2$ et la largeur de bande $\Delta f / f = 1/Q$ d'où l'on déduit les quantités Q_0 et Q_e par les formules :

$$Q_e = 2Q/(1 + R_m) = (2f/\Delta f) \, [1/(1 + R_m)] \quad (21)$$

$$Q_0 = 2Q/(1 - R_m). \quad (22)$$

Quand on a placé dans la cavité une bille de ferrite dont les pertes varient en fonction du champ magnétique appliqué $\mathcal{H}_0$, le coefficient de surtension Q_0 donc R_m varie Q_e restant fixe.

$$Q_0/Q_e = (1 + R_m)/(1 - R_m) \quad (23)$$

Δ représentant une différence finie :

$$\Delta(1/2Q_0) = (1/2Q_e)\,\Delta[1/(1 + R_m)] \quad (24)$$

Q_e se déduit de 21.

En définitive pour connaître les paramètres χ', χ'', $k'k''$ on appliquera les formules :

$$\chi' \pm k' = -\frac{1}{\eta\Delta v}\frac{\Delta f\pm}{f_0} \quad (25)$$

$$\chi'' \pm k'' = \frac{1}{\eta\Delta v}\frac{1}{Q_e}\Delta\left(\frac{1}{1 + R_m^{\pm}}\right). \quad (26)$$

Dispositif expérimental. — Les formules 25 et 26 montrent que pour déterminer le tenseur de perméabilité d'un ferrite il faut : savoir exciter une cavité de sorte que dans un certain volume le champ magnétique soit polarisé circulairement ; pouvoir mesurer l'énergie R_m réfléchie par la cavité et la fréquence de résonance f de cette cavité ; déterminer Q_e, η, Δv.

Aux deux fréquences de mesure la cavité est une cavité cylindrique de rayon R résonnant sur le mode fondamental TE^{111} quand on excite cette cavité par deux ondes polarisées rectilignement à angle droit et déphasées de $\pi/2$. Il existe autour de l'axe du cylindre une zone de polarisation circulaire. La figure 2 donne le taux d'ellipticité en fonction de la distance ρ à l'axe du guide.

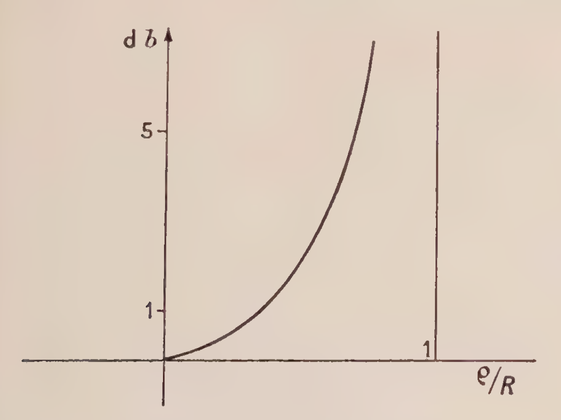


Fig. 2. — Taux d'ellipticité en db à la distance ρ de l'axe du guide.

Le mode d'excitation de la cavité est différent suivant la longueur d'onde utilisée.

1° Le schéma de l'appareillage utilisé à 3 cm est donné figure 3, il diffère peu du dispositif décrit par Artman et Tannenwald (référence 1).

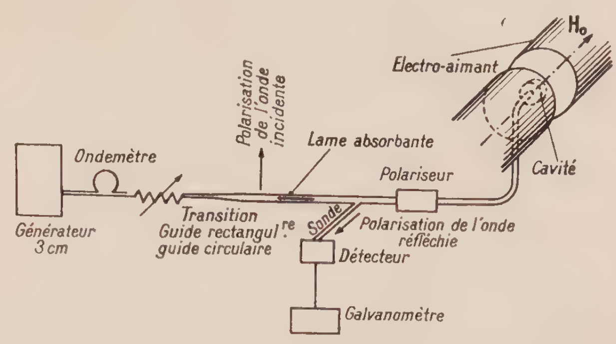


Fig. 3. — Dispositif de mesure du tenseur de perméabilité à 8 500 Mc/s.

L'onde produite par un générateur classique après traversée d'une lame quart d'onde se trouve polarisée circulairement, elle pénètre dans la cavité après avoir traversé 2 coudes. Le taux d'ellipticité du dispositif est inférieur à 0,4 db dans la bande de la cavité. Le taux d'ondes stationnaires à l'entrée du dispositif reste inférieur à 1,2 même à la fréquence de résonance de la cavité ce qui montre que malgré sa forte surtension (de l'ordre de 5 000) cette dernière introduit très peu d'ellipticité : en effet l'énergie réfléchie par la cavité après être passée à nouveau par le polariseur, se retrouve polarisée rectilignement mais à 90° de l'onde incidente, il n'apparaît de taux d'ondes stationnaires que s'il y a ellipticité. On peut ainsi séparer l'énergie réfléchie de l'énergie incidente. Une lame absorbante disposée de façon convenable empêche toute réflexion de l'énergie réfléchie par la cavité tout en laissant passer l'onde incidente. La coupe de la cavité est donnée figure 4. Le diaphragme est taillé

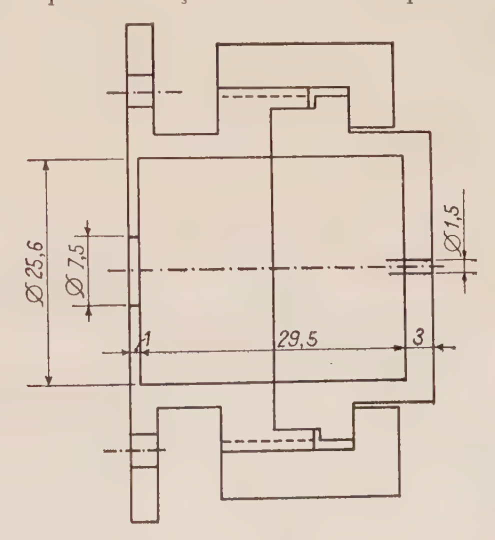


Fig. 4. — Cavité utilisée à 8 500 Mc/s.

dans la masse. La cavité s'ouvre suivant un plan qui ne coupe pas les lignes de courant. La fréquence de résonance du mode TE_{111} est 8 500, la surtension 4 230, le coefficient η vaut 48,9 10^{-6} mm^{-3}, le coefficient Q_e est égal à 15 640.

2° Le schéma de l'appareillage utilisé à 10 cm est donné figure 5, le dispositif d'Artman et

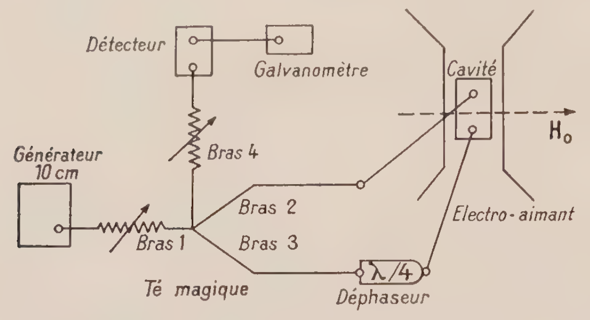


Fig. 5. — Dispositif de mesure du tenseur de perméabilité à 300 Mc/s.

Tannenwald nécessiterait à 10 cm un électro-aimant de dimensions considérables. Pour supprimer les coudes on a été amené à utiliser un autre dispositif.

L'excitation de la cavité se fait par deux antennes à angle droit, elles sont alimentées par deux câbles coaxiaux dont les longueurs électriques diffèrent d'un quart de longueur d'onde. Ces câbles aboutissent aux bras 2 et 3 d'un Té magique attaqué en 1. Les énergies réfléchies de la cavité vers ces deux bras présentent entre elles une différence de phase de 180°. Toute l'énergie réfléchie par la cavité part par le bras 4. Le Té magique utilisé présente un découplage de 20 db entre les bras 2 et 3, 36 db entre les bras 1 et 4, le T. O. S. des bras 1 et 4 est inférieur à 1,1.

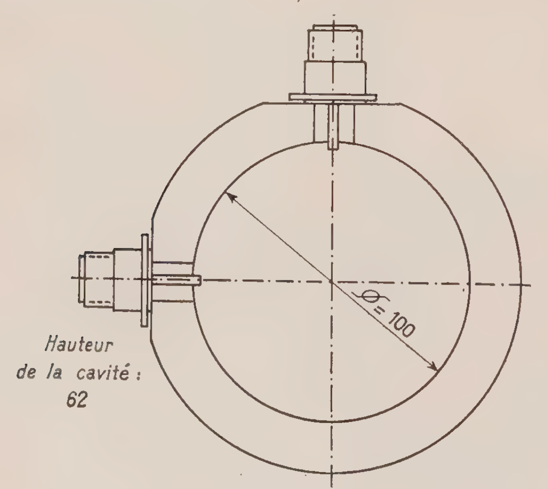


Fig. 6. — Coupe de la cavité utilisée à 3 000 Mc/s.

La coupe de la cavité est donnée figure 6. La fréquence de résonance du mode TE_{111} est 2 980 MHz, sa surtension 5 400, son coefficient η vaut 2,8 10^{-6} mm^{-3} et Q_e est égal à 10 800.

Remarque. — Si les deux antennes ne sont pas bien réglées, la fréquence de résonance de la cavité attaquée par l'antenne 1 n'est pas la même que la fréquence de la cavité excitée par 2 puisque les coefficients de couplage ne sont pas les mêmes. La courbe de résonance présente alors deux bosses. La cavité n'est plus dégénérée.

Le champ magnétique $\mathcal{H}_0$ est produit par un électro-aimant dont les pièces polaires ont 14 cm de diamètre. Le champ est mesuré par un fluxmètre étalonné par résonance nucléaire.

Résultats expérimentaux. — Nous avons étudié cinq qualités de ferrite mises au point au Département de Physico-Chimie de la Compagnie Générale de T. S. F. par le laboratoire dirigé par M. Vas-

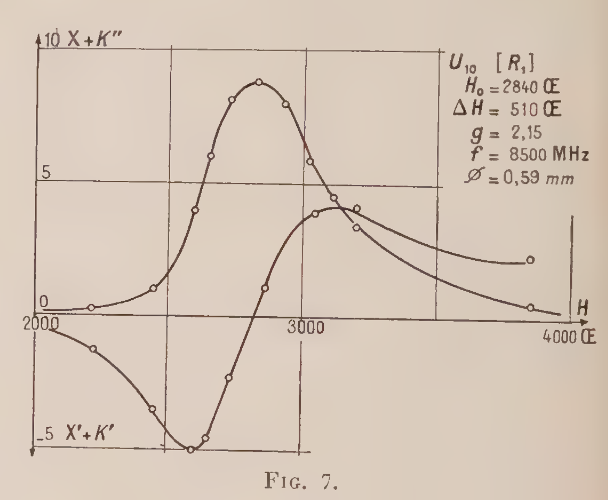


Fig. 7.

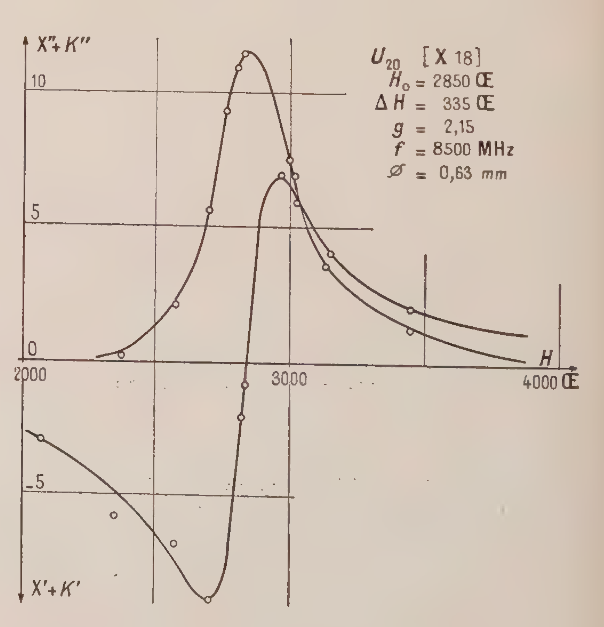


Fig. 8.

siliev. Il s'agit de céramiques polycristallines commercialisées par COFELEC sous les appellations U_{10}, U_{20}, U_{21}, U_{30}, U_{31}. Ce sont des compositions du diagramme des ferrites manganèse-magnésium avec addition éventuelle d'alumine (U_{30}, U_{31}).

Les sphères nécessaires aux mesures sont taillées par la méthode classique qui consiste à envoyer dans le cylindre abrasif où l'on a introduit l'échantillon à façonner un jet d'air comprimé. Le diamètre des billes est de l'ordre de 2 mm pour les mesures faites à 10 cm, elles sont réduites à 0,6 mm de diamètre pour les mesures à 3 cm.

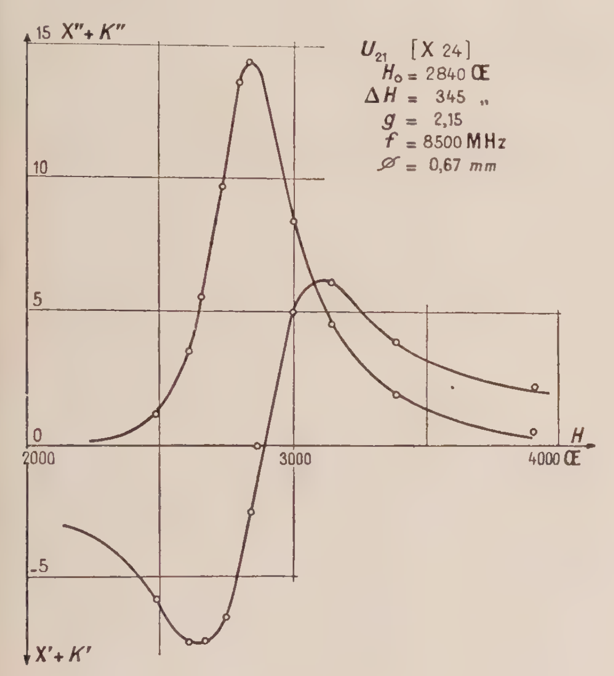


FIG. 9.

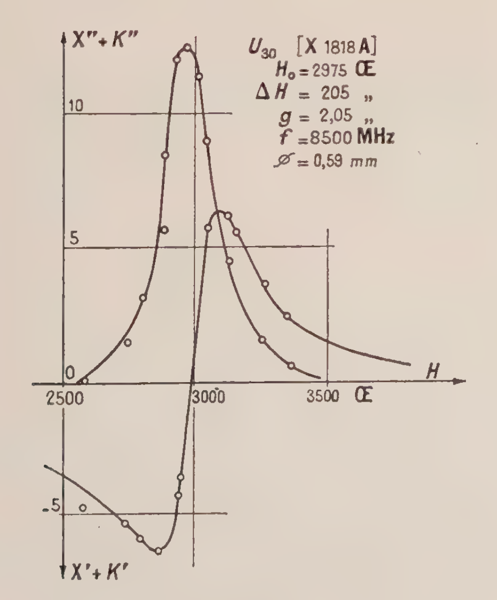


FIG. 10.

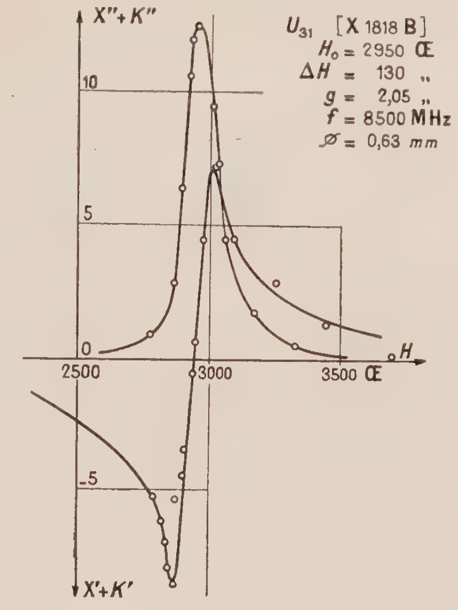


FIG. 11.

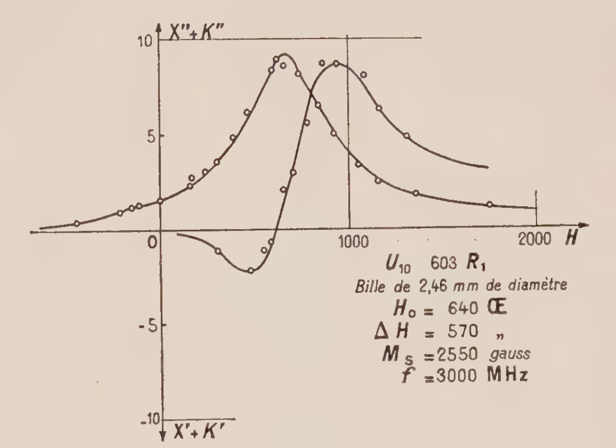


FIG. 12.

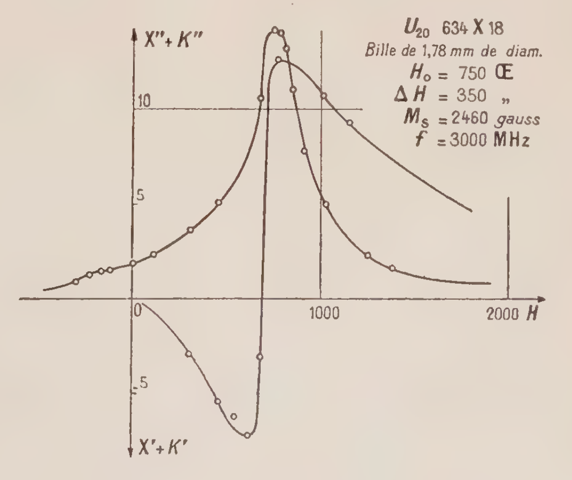


FIG. 13.

Les courbes des figures 7 à 16 donnent la variation de χ'^{+} et χ''^{+} en fonction du champ magnétique $\mathcal{H}_0$. Les courbes χ'^{-} et χ''^{-} aux erreurs de mesure près sont confondues avec l'axe des champs.

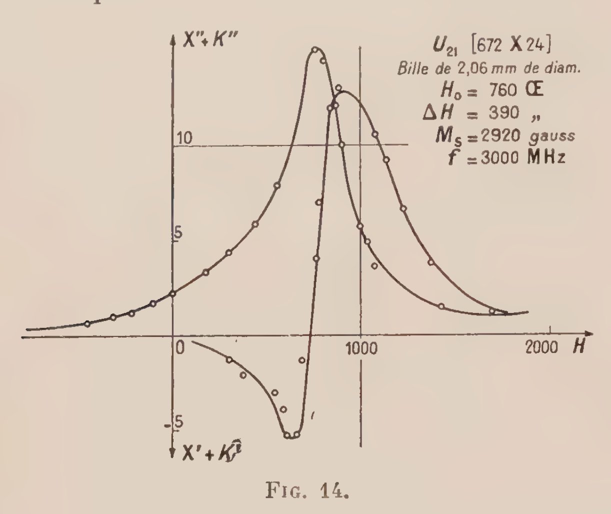


Fig. 14.

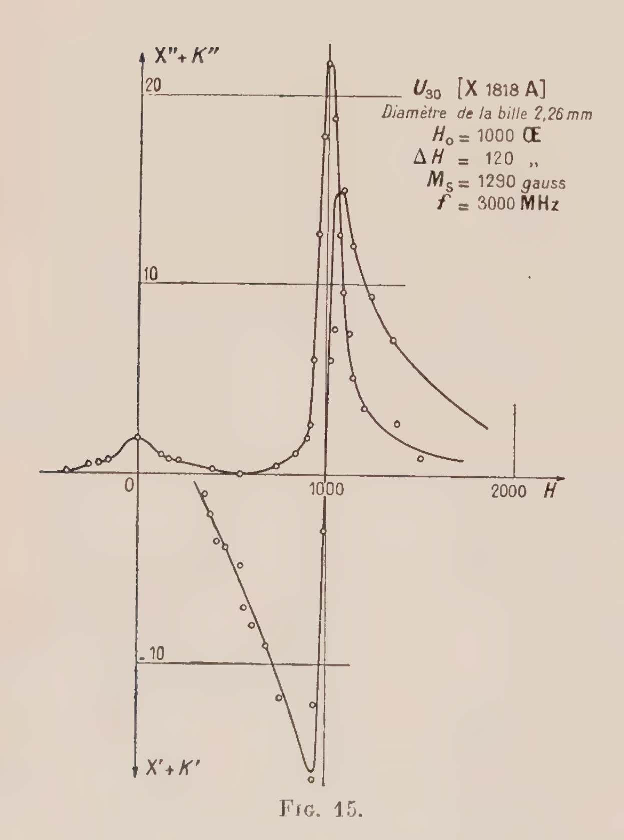


Fig. 15.

Les billes de ferrite sont introduites dans la cavité à l'aide d'une vis en nylon qui leur sert de support. Une variation de l'enfoncement de 1 mm entraîne un écart de 2 % sur les valeurs mesurées, c'est l'ordre de grandeur des erreurs de mesure.

Le tableau 1 donne pour les cinq variétés de ferrite : le point de Curie et le moment magnétique à saturation $4\pi M_s$ du ferrite mesuré par des mé-

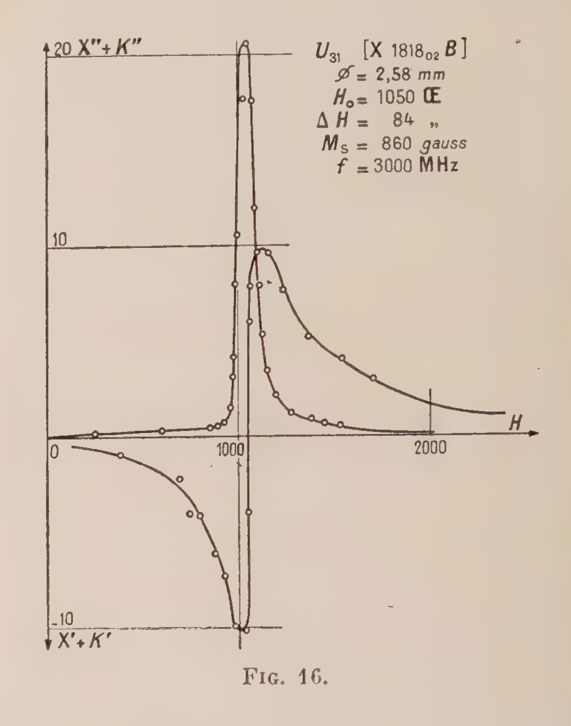


Fig. 16.

thodes statiques ; la largeur ΔH des courbes de résonance ; le facteur g apparent. Si ω_0 et H_0 sont respectivement la pulsation et le champ de résonance on a :

$$\gamma = \omega_0 / H_0 = g\, e/2m; \tag{27}$$

le moment de saturation M'_s que l'on peut déduire des formules de Bloembergen qui montrent que

$$M'_s = (\chi'' + k'')_M\, (\Delta H/2) \tag{28}$$

en appelant $(\chi'' + k'')_M$ la valeur maximale de $\chi'' + k''$.

Interprétation des courbes relevées à 3 000 Mc-s. — On constate l'apparition de pertes aux champs faibles pour les variétés de ferrite dont le moment à saturation est tel que :

$$4\pi\, M_s\, \gamma > f_0 \qquad (\gamma \cong 2{,}8 \text{ Mc/s/Oe}_r).$$

Ces pertes aux champs faibles peuvent être distinctes des pertes à la résonance (variété U_{30}) ou noyées dans les pertes à la résonance (variétés U_{10} — U_{20} — U_{21}). Dans ce dernier cas la notion de largeur de raie de résonance n'a plus qu'une signification expérimentale.

Pour les deux variétés (U_{30}, U_{31}) où les courbes de résonances sont encore bien définies le ΔH est plus faible à 3 000 Mc/s qu'à 9 000 Mc/s.

L'apparition de pertes aux champs faibles s'accompagne d'une dissymétrie dans la courbe de dispersion.

TABLEAU 1

Variétés de ferrites	U_{10}	U_{20}	U_{21}	U_{30}	U_{31}
T_c	332	302	286	190	142
$4\pi M_s$ (statique)	2 373	2 478	2 670	1 200	900
g (3 000 Mc/s)	3,3	2,8	2,8	2,12	2,05
ΔH (3 000 Mc/s)	570	350	390	120	84
$4\pi M_s'$ (3 000 Mc/s)	2 550	2 460	2 920	1 290	860
g (8 500 Mc/s)	2,15	2,15	2,15	2,05	2,05
ΔH (8 500 Mc/s)	510	335	345	205	130
$4\pi M_s'$ (8 500 Mc/s)	2 200	2 000	2 480	1 290	812

Tableau donnant la température de Cure (T_c) le moment magnétique ($4\pi M_s$) mesuré par méthode statique. Le facteur g ; la largeur ΔH en œrsted de la courbe de résonance et le moment $4\pi M_s'$ déduit de formule de Bloembergen pour les 2 fréquences de mesures — 3 000 et 8 500 Mc/s.

Les mesures sont faites à 1 %, mais des échantillons tirés d'un même lot peuvent présenter, entre eux, des dispersions plus importantes. Les chiffres donnés ici ne doivent pas être considérés comme des constantes caractérisant un matériau bien défini du moins, à l'époque où ces mesures ont été faites.

L'apparition de cette dissymétrie peut s'expliquer à partir des relations de Kramers-Kronig [1] qui relient la partie réelle à la partie imaginaire de la susceptibilité :

$$\chi'(H_0) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(H)}{H - H_0} \, \mathrm{d}H \qquad (29)$$

$$\chi''(H_0) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi'(H)}{H - H_0} \, \mathrm{d}H. \qquad (30)$$

Les relations de Kramers-Kronig qui sont équivalentes aux relations de Bode pour les circuits peuvent s'énoncer en disant que la partie réelle de la susceptibilité : χ' est la transformée de Hilbert de la partie imaginaire χ''.

La formule (29) nous montre que si nous possédons un développement de $\chi''(H)$ nous obtiendrons un développement en série de $\chi'(H)$, les fonctions de base du second développement étant les transformées de Hilbert des fonctions de base du premier.

Dans notre problème le développement qui s'impose est le développement en série de fonctions translatée [2] en prenant pour fonction de base la fonction de Lorentz :

$$y = \frac{A}{(x - x_0)^2 + a^2}$$

dont la transformée de Hilbert est :

$$Y = \frac{A(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + a^2}.$$

Remarque. — En posant :

$$x = \omega \qquad x_0 = \gamma H$$

$$a^2 = 1/T^2 \qquad A = \gamma M_s$$

on retrouve les expressions qui figurent dans les formules de Bloembergen.

Bornons-nous au cas où le développement ne comprend que 2 termes, le premier représentant les

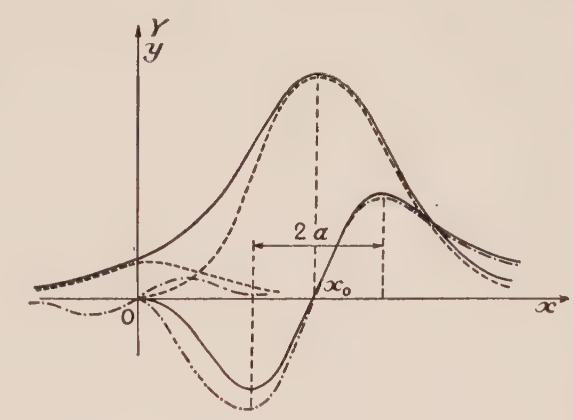


Fig. 17. — Courbes.

pertes à la résonance, le deuxième les pertes aux champs faibles centrées sur $x_0 = 0$

$$y = \frac{A}{(x - x_0)^2 + a^2} + \frac{B}{x^2 + b^2}. \qquad (31)$$

Dont la transformée est :

$$Y = \frac{A(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + a^2} + \frac{Bx}{x^2 + b^2}. \qquad (32)$$

Nous avons tracé (*fig.* 17) les courbes y et Y en trait plein et en pointillé les courbes élémentaires dont elles sont la somme. On s'aperçoit que la théorie rend assez bien compte de l'allure des courbes relevées expérimentalement.

(1) Voir, par exemple, la première partie de la Thèse de Mme Soutif (référence 4).

(2) Voir Arsac (M.), Sur l'approximation d'une classe de fonctions au moyen de translatées d'une fonction donnée, à paraître dans les *Annales de Radioélectricité*.

Conclusion. — Le tenseur de susceptibilité d'un certain nombre de ferrites du diagramme des ferrites de manganèse-magnésie a été mesuré à 3 000 Mc/s et 8 500 Mc/s. On a constaté une diminution de la largeur de la courbe de résonance quand on passait de 8 500 à 3 000 Mc/s. Pour les variétés de ferrite à haut moment de saturation il apparaît une dissymétrie dans la courbe de dispersion. Cette dissymétrie peut s'expliquer à partir des formules de Kramers-Kronig.

Manuscrit reçu le 21 décembre 1959.

RÉFÉRENCES

[1] Artman et Tannenwald, *JAP*, 1955, **26**, 1124-1132.
[2] Von Aulock et Rowen, *BSTJ*, 1957, **36**, 427.
[3] Le Craw et Spencer, IRE Convention Record, part, 5, 1956, p. 66-74.
[4] Soutif (Mme), Thèse, *Annales des Télécomm.*, juillet-août 1958.

REMARQUES SUR LA RÉALISATION DE CHAMBRES A SCINTILLATIONS

Par J. DUFLO,

Laboratoire de Physique Atomique et Moléculaire, Collège de France.

Résumé. — Des précisions sont apportées sur les moyens de réaliser une chambre à scintillations à l'aide de la caméra électronique Lallemand-Duchesne, et de filaments d'iodure de césium refroidis. L'étude de la distribution de la lumière émise par les filaments a été faite et a permis des remarques concernant le dispositif de transmission optique entre le scintillateur et la caméra.

Abstract. — Details are given of the construction of a scintillation chamber utilizing refrigerated CsI filaments and a Lallemand-Duchesne electronic camera. The angular distribution of the light emitted by the filaments has been studied and remarks are made concerning possible optical systems to transmit the light from scintillator to camera.

Le Laboratoire de Physique Atomique et Moléculaire a entrepris, en collaboration avec l'Observatoire de Paris et le Centre d'Études Nucléaires de Saclay, de réaliser une chambre à filaments scintillants, en utilisant la caméra électronique de de A. Lallemand et M. Duchesne [1, 2, 3].

Rappelons que dans un tel dispositif, chaque filament, traversé par une particule chargée, devient une source de lumière. Une projection de la trajectoire de la particule est matérialisée par les extrémités des filaments illuminés ; un amplificateur de brillance est nécessaire pour permettre l'enregistrement photographique de cette trajectoire.

L'amplification de brillance de la caméra électronique, par rapport à la photographie classique sur plaque 103-0 Kodak, était de 50 à 100 [2]. Ce gain était insuffisant pour la réalisation d'une chambre à scintillations, et L. Goldzahl a proposé de l'améliorer par une meilleure utilisation de la technique des émulsions nucléaires. Nous sommes ainsi parvenus à distinguer du bruit de fond les traces des électrons accélérés sous 26 keV dans la caméra. Par comptage de ces traces nous avons, pour des poses de courte durée, porté le gain à 10 000 et, par mesure microphotométrique classique à 1 000 environ [4]. Ces résultats sont illus-

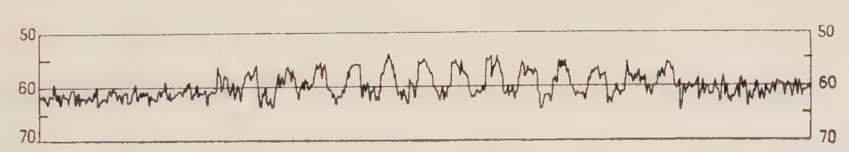


Fig. 1. — Microphotométrie d'une mire de Foucault obtenue par photographie classique sur plaque 103-O Kodak Rochester. Pas de la mire : 200 μ ; pose : 100 s. Dimensions du spot du microphotomètre : hauteur : 750 μ, largeur : 18 μ.

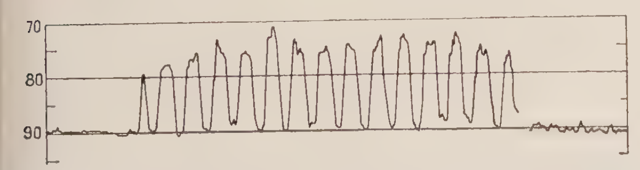


Fig. 2. — Microphotométrie d'une mire de Foucault obtenue par photographie électronique sur plaque G. 5. Ilford. Pas de la mire : 200 μ, grandissement électronique 0,8 ; pose : 1 s. Dimensions du spot du microphotomètre : largeur : 14 μ, hauteur : 750 μ.

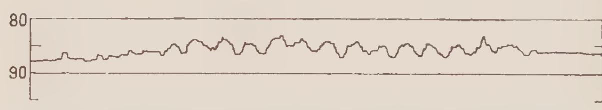


Fig. 3. — Microphotomètrie d'une mire de Foucault obtenue par photographie électronique sur plaque G. 5. Ilford. Pas de la mire : 200 μ ; grandissement électronique 0,8 ; pose 1/10 s. Dimensions du spot du microphotomètre : largeur : 14 μ, hauteur : 750 μ.

trés par les figures 1, 2, 3 et 4. Les mesures du bruit de fond nous permettent de dire qu'à l'aide d'un obturateur électronique autorisant des poses de 10^{-3} à 10^{-4} s nous éliminerons complètement les traces parasites produites par l'émission spontanée de la photocathode. Malgré le voile chimique des plaques nous pourrons alors certainement détecter une image par comptage, lorsque cette

image sera formée de plus de 4 photoélectrons par 10 000 μ^2. Par contre, 30 traces par 10 000 μ^2 seront nécessaires pour l'observation d'une image par densité et comme nous utiliserons une optique électronique de grandissement 1/10 et des photocathodes de rendement quantique entre 1/10 et 1/5,

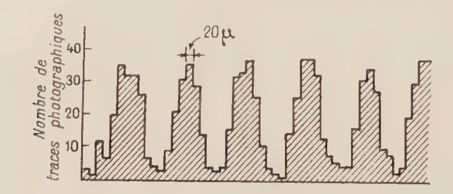


Fig. 4. — Détection par comptage des traces électroniques d'une mire de Foucault obtenue par photographie électronique avec plaque Ilford G. 5. Pas de la mire : 200 μ ; grandissement électronique 0,8. L'ordonnée de chaque tiret horizontal est égal au nombre de traces électroniques comprises à l'intérieur d'un rectangle de 26 × 170 microns. Pose 1/10 s.

c'est 150 à 300 photons par mm² qui devront arriver sur la couche photosensible pour obtenir un tel résultat.

Pour pouvoir envoyer une telle quantité de lumière sur la photocathode nous avons recherché le scintillateur de meilleur rendement et étudié les différents couplages entre les filaments et la caméra.

Nous avons choisi l'iodure de césium, non activé, mais utilisé à 70 °K, comme scintillateur [5]. Y. Koechlin et B. Parlier, du Centre d'Études Nucléaires de Saclay, ont réalisé des filaments d'iodure de césium de section carrée de 1 à 2 mm de côté et de quelques cm de long, et montré que ces fils permettaient, pour une particule au minimum d'ionisation, d'obtenir environ 1 000 photons par mm de trajectoire.

En ce qui concerne le couplage entre le scintillateur et la caméra électronique, deux possibilités s'offrent à nous :

l'une est de mettre la chambre à scintillations et le support de la couche photosensible en contact. En tenant compte des réflexions sur les lames transparentes séparant les filaments de cette couche photosensible, nous pensons pouvoir recueillir 80 % de la lumière émise ;

la seconde est de placer une optique entre les filaments et la caméra électronique.

Pour cette seconde possibilité plusieurs facteurs sont à considérer :

a) l'ouverture de l'optique : dans les meilleures conditions elle correspond à un sinus de 0,7 à 0,8 ;

b) le facteur de transmission : pour une optique très ouverte, donc constituée de 5 ou 6 lentilles, il ne pourra dépasser 60 à 70 %, même en traitant l'optique pour l'intervalle de longueur d'onde utilisé ;

c) le grandissement : une réduction s'impose si nous désirons utiliser une chambre à scintillation d'un diamètre supérieur à celui de la photocathode. Or une optique de faible grandissement ne transmet qu'une petite fraction de la lumière émise par la source. J'ai donc été amené à étudier la structure géométrique et l'intensité du faisceau lumineux issu d'un filament. J'ai ainsi pu constater que l'intensité de la lumière sortant suivant l'axe du fil, était le double de celle calculée par la loi de Lambert. L'ensemble des résultats obtenus est porté sur la figure 5, dans laquelle : la courbe 1

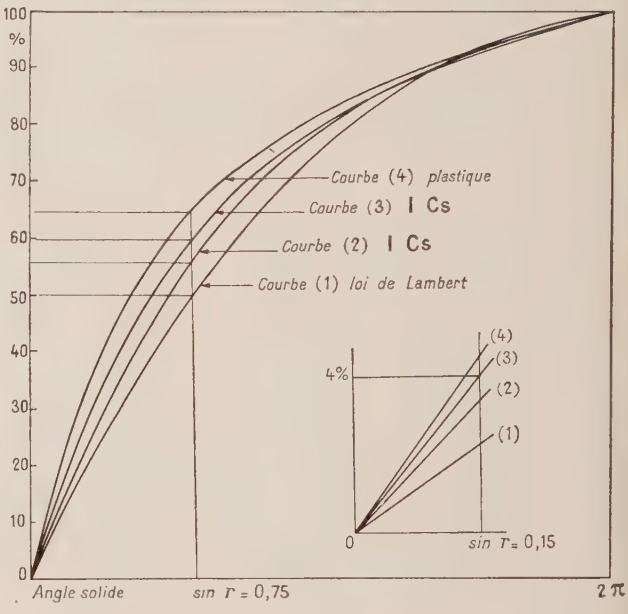


Fig. 5. — *Taux de lumière sortant d'un filament en fonction de l'angle solide limitant le faisceau.* Sinus *r* (*r*, angle de sortie de la lumière, par rapport à l'axe du filament).

0,75	loi de Lambert	56 %	courbe (1)
	I Cs simplement poli	60 %	courbe (2)
	I Cs + lame de verre	64 %	courbe (3)
	filament plastique	68 %	courbe (4)
0,15	loi de Lambert	2,25 %	courbe (1)
	I Cs simplement poli	3,5 %	courbe (2)
	I Cs + lame de verre	4 %	courbe (3)
	filament plastique	4 à 5 %	courbe (4)

représente la loi de Lambert ; la courbe 2 correspond à un filament d'iodure de césium dont l'extrémité n'a pas été parfaitement polie ; la courbe 3 a été obtenue à l'aide d'un filament dont l'extrémité a été rendue parfaitement plane par la mise en contact optique avec une petite plaque de verre de 2/10 de mm. Un gain sensible de lumière est alors obtenu suivant l'axe du filament (10 à 15 %) ; la courbe 4 a été obtenue avec un filament plastique dont l'extrémité avait été moulée (plane). La surface latérale avait été parfaitement dégraissée à l'aide d'oxyde de césium et d'alcool.

Ces mesures ont été faites à l'aide du dispositif, schématisé (*fig.* 6).

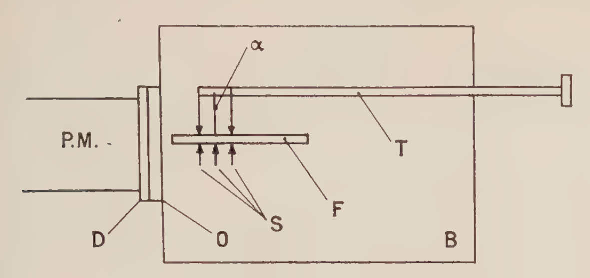


Fig. 6. — Schéma de l'appareillage.

P. M. : photomultiplicateur.
D. : diaphragme variable.
O. : obturateur.
S. : supports du filament (pointes) liés à la tige T.
B. : boîte étanche à la lumière.
α. : source de polonium diaphragmée.
F. : filament scintillant étudié.
T. : tige permettant le déplacement du filament et de la source suivant l'axe du P. M.

Ces résultats s'expliquent facilement. En effet, considérons un filament de 1 mm de diamètre et quelques cm de long, traversé par une particule ionisante à 2 cm de la face de sortie. Les trajets optiques sont dessinés sur la figure 7.

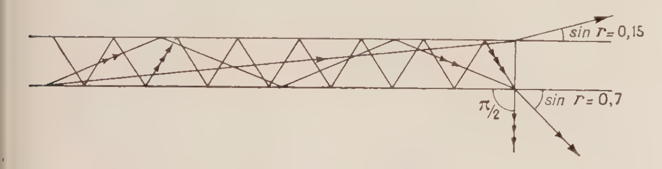


Fig. 7. — Réflexion de la lumière à l'intérieur d'un filament.

Nous constatons que la lumière sortant suivant un angle $r \leqslant 11^o$ par rapport à l'axe (à $\sin r \leqslant 0{,}15$) ne s'est réfléchie sur les parois qu'au maximum deux fois. La lumière qui s'est réfléchie deux ou trois fois sort suivant un angle r compris entre 11° et 17° ($\sin r \leqslant 0{,}3$).

Celle qui a subi 3 à 6 réflexions, entre 17 et 34° ($\sin r \leqslant 0{,}56$).

Celle qui a subi 6 à 12 réflexions, entre 34 et 90° ($\sin r \leqslant 1$).

Les rayons ayant subi un grand nombre de réflexions sont très affaiblis, les faces n'étant jamais parfaitement réfléchissantes. C'est le cas des rayons dont l'angle de sortie est grand. Pour cette même raison il ne sera pas possible d'utiliser des fils scintillants très longs ou à section très petite.

Les écarts des résultats obtenus avec les fils scintillants par rapport à la loi de Lambert se justifient aussi par les réflexions sur la face de sortie (formules de Fresnel). Pour $r = 50^o$, la fraction de lumière réfléchie est respectivement 8 et 12 % pour le plastique et l'iodure de césium. Elle atteint 100% pour $r = 90^o$. Si l'extrémité n'est pas optiquement plane la lumière est diffusée et l'émission se rapproche de la loi de Lambert, ce que nous avons pu constater lors des mesures faites avec un filament simplement poli ou rendu optiquement plan à l'aide d'une lame de verre (courbes 2 et 3). Ces pertes par réflexion sur la face de sortie pourraient être sensiblement diminuées à l'aide d'une couche antiréflectrice.

Les différences d'absorption de la lumière, suivant les trajets empruntés dans le scintillateur, n'interviennent que faiblement. En effet un rayon qui sort après s'être réfléchi 6 fois par cm (ce rayon est alors réfracté tangentiellement à la face de sortie) voit son parcours augmenté de 25 % par rapport à celui d'un rayon se propageant suivant l'axe du filament.

Enfin nous avons observé qu'en rendant réfléchissante la face opposée à celle utilisée comme source, par exemple avec une feuille d'aluminium en contact optique, nous obtenons avec un filament de 4 cm de long, un gain d'environ 30 % pour la lumière sortant normalement, et 15 % sur l'ensemble du flux sortant. Ce gain devient nul pour un filament de 10 cm l'excitation lumineuse étant à 25 mm de la face de sortie de la lumière, dans les deux cas. Ceci s'explique par les pertes par absorption et réflexions.

A l'aide des résultats ci-dessus, nous allons maintenant évaluer les rendements que l'on peut espérer avec des optiques ouvertes à 0,75, et de grandissement 1 et 1/5. Nous tiendrons compte pour cela du pourcentage de photons envoyés par chaque filament dans l'optique, du facteur de transmission de cette optique, et de l'aire de la couche photosensible éclairée par un filament. Les pourcentages de photons sont indiqués sur les courbes de la figure 5. Pour un grandissement 1, 60 % des photons émis atteignent l'optique et 4 % lorsque le grandissement est 1/5 (la loi de Lambert nous donnerait respectivement 50 et 2,25 %). Le facteur de transmission est environ 70 % dans les deux cas. L'éclairement de la photocathode par des optiques ouvertes à 0,75 et de grandissement 1 et 1/5 atteint donc respectivement 42 % et 70 % de la brillance des filaments. (Dans le second cas, la surface éclairée par un filament est évidemment 25 fois plus petite.)

L'utilisation de chambres à scintillations de plus grandes dimensions nécessiterait une réduction optique plus importante. Malheureusement nous devons nous limiter actuellement à un facteur 5 pour deux raisons :

L'une est que le rapport de l'image réellement obtenue sur la plaque à l'image géométrique de l'extrémité d'un filament augmente très vite lorsque la réduction globale dépasse 50 (5 optique, 10 optique électronique). En effet, pour un filament d'un mm de diamètre et une réduction 50,

l'image géométrique est un cercle de diamètre 20 μ. Les dimensions de l'image réelle sont celles de l'image géométrique, augmentées au plus de la longueur des traces des photoélectrons dans l'émulsion nucléaire, longueur qui est de l'ordre de 7 μ pour des électrons accélérés sous 30 keV, les aberrations optiques et électroniques étant négligeables. Dans ce cas l'image réelle peut atteindre 34 μ. Le rapport image réelle sur image géométrique est alors 1,7 et il semble raisonnable de ne pas l'augmenter par une réduction plus importante. Toutefois, nous pourrions diminuer la longueur des traces des photoélectrons en les accélérant sous une tension moins élevée, mais la densité de l'image en serait affaiblie.

Les fluctuations statistiques créent une seconde limitation à une réduction plus importante car le nombre de photons par filament atteignant la photocathode devient très petit. D'après les évaluations précédentes, sur 1 000 photons émis par un filament d'un mm de diamètre, une optique 1/5 en transmet environ 30. C'est donc en moyenne 4 à 5 électrons qui forment l'image d'un filament sur l'émulsion. Une optique 1/10 n'envoie plus que 7 à 8 photons, soit 1 électron en moyenne pour former l'image. Des manques de plus en plus nombreux risquent alors de conduire à une interprétation erronée du phénomène enregistré.

Des remarques précédentes nous pouvons donc prévoir que les trois dispositifs de transmission considérés (optiques de grandissement 1 et 1/5, et contact) permettront de déceler une image par densité. Toutefois, une optique de grandissement inférieure à 1 est préférable pour construire des chambres à scintillations de grandes dimensions. Pour un tel projet, le dispositif de transmission par contact, quoique présentant le meilleur rendement lumineux (80 % au lieu de 60 % avec une optique 1/5 et 42 % avec une optique 1) nécessiterait d'augmenter dans le même rapport la caméra électronique et le bloc scintillant. En dehors des difficultés de construction, ceci ne pourrait se faire qu'au détriment de la définition de l'image, car l'épaisseur du support de verre de la couche photosensible séparant celle-ci des filaments, devrait être augmentée. Ce problème ne se pose pas avec une optique, car nous pouvons mettre au point sur la couche photosensible.

Manuscrit reçu le 11 décembre 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lallemand (A.), *C. R. Acad. Sc.*, 1936, **203**, 243 ; 1936, **203**, 990.
[2] Lallemand (A.) et Duchesne (M.), *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **233**, 305 ; 1954, **238**, 335 ; 1955, **240**, 1329 ; 1955, **241**, 360 ; 1956, **242**, 2624. Lallemand (A.), Duchesne (M.), Fehrenbach (Ch.), Wlerick (G.), Chopinet (Mlle M.) et Augarde (R.), *C. R. Acad. Sc.*, 1958, **246**, 2342.
[3] Lallemand (A.), Duchesne (M.) et Wlerick (G.), Symposium sur les récepteurs photoélectriques d'images, Imperial College, London, 1958.
[4] Lallemand (A.), Duchesne (M.), Goldzahl (L.), Duflo (J.) et Banaigs (J.), *C. R. Acad. Sc.*, 1959, **248**, 2191-2193.
[5] Knoepfel, *Helv. Phys. Acta*, 1957, **6**, 521 à 552.

SUPPLÉMENT AU Nº 3.
TOME 21, MARS 1960, PAGE 69 A.

LETTRES A LA RÉDACTION

RÉGULATION D'INTENSITÉ SANS DISTORSION

Par J. Suchet,
Services de Recherche
de la Compagnie de Saint-Gobain, Paris.

La régulation de l'intensité d'un courant alternatif traversant une charge de résistance variable fait généralement appel à des éléments de circuits non-linéaires (transformateurs à fer saturé, résistances fer-hydrogène, résistances NL ou VDR) ou à des éléments réactifs (selfs et capacités) qui modifient l'angle de phase des courants les traversant.

Lorsque l'on cherche à réguler l'intensité d'un courant sinusoïdal de très basse fréquence comportant un très faible taux d'harmoniques, et que l'on désire éviter d'introduire une distorsion qui se traduirait par une augmentation de ce taux, on se heurte en général à de grosses difficultés, et on est souvent amené à procéder à un filtrage ultérieur nécessitant des circuits spéciaux.

La solution que nous présentons repose essentiellement sur l'insertion en série avec la charge variable d'une thermistance à chauffage indirect, dont la valeur est réglée au moyen de l'énergie fournie à son enroulement chauffant [1] de manière que la résistance totale du circuit reste constante. Pour cela, la tension aux bornes de la charge est appliquée à un amplificateur fonctionnant en classe A comprenant un ou plusieurs étages de transistors dont le premier est monté avec émetteur commun. Le courant de sortie alimente l'enroulement chauffant de la thermistance.

Le montage de la figure 1 comporte un ampli à un étage et peut s'appliquer à une charge variant à partir d'une valeur nulle. Une tension sinusoïdale pure est appliquée entre les points A et B entre lesquels sont disposées en série la charge variable R_c, la thermistance T_h et une résistance ballast R_1. Le transistor T est un transistor de puissance basse fréquence dont l'entrée est reliée aux bornes de la charge à travers une résistance R_2. Dans ces conditions, toute augmentation de la valeur de la charge entraîne une diminution de la résistance émetteur-collecteur du transistor, et une plus grande énergie dissipée dans le filament chauffant de T_h entraîne une diminution de la valeur de cette dernière, en raison de son coefficient de température négatif. Il est possible d'obtenir, en ajustant les caractéristiques de T, T_h, R_1, R_2, une large plage de régulation du courant traversant la charge. En particulier, le choix d'un transistor ayant un courant de repos fixé en fonction des autres données du circuit permet de maintenir la régulation pour une charge nulle.

L'insertion dans le circuit de la charge de T_h et R_1, qui sont des résistances pures, ne peut introduire aucune distorsion. Quant au courant dérivé traversant R_2, R_3 et le transistor, il reste faible devant le courant traversant la charge tant que la valeur de celle-ci reste faible devant $R_2 + R_3$. Même lorsque les résistances des deux circuits deviennent comparables,

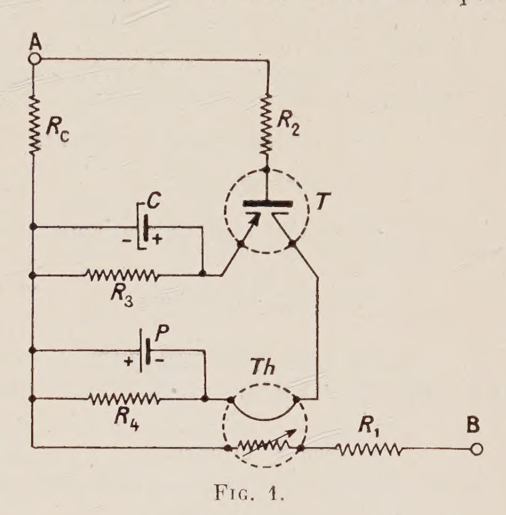


Fig. 1.

c'est-à-dire près de la limite supérieure fixée pour R_c dans la plage de régulation, la jonction émetteur-base n'introduit pas de distorsion car elle équivaut pratiquement à un court-circuit, la différence de potentiel à ses bornes n'excédant pas un dixième de volt. Ceci justifie le choix du montage avec émetteur commun dans lequel la présence du transistor équivaut à un shunt de la charge.

Le facteur de mérite d'un tel montage est très faible, le temps de réponse de la thermistance étant de 30 secondes environ et la puissance absorbée dans la perle de l'ordre de 60 milliwatts. Il sera toutefois précieux chaque fois que l'on voudra réguler un signal sinusoïdal pur dans une charge variant lentement, sans être gêné par des considérations de fragilité, de dimensions, de poids et d'alimentation. Ces conditions se présentent dans certaines études relatives au fonctionnement des transistors.

Nous l'avons utilisé avec succès pour réguler le courant traversant l'échantillon semiconducteur au cours de la réalisation d'un appareillage de mesure de la constante de Hall en fonction de la température utilisant la méthode alternative aux très basses fréquences dans le champ d'un aimant tournant [2]. On sait en effet que la résistance électrique d'un tel échan-

tillon peut varier dans de grandes proportions dans l'intervalle de températures envisagé pour la mesure, et qu'une régulation est donc indispensable pour simplifier la lecture de la grandeur mesurée et éviter la mesure simultanée du courant. Toutefois, le principe de la mesure comporte une modulation de fréquence f_1 du courant traversant la charge par un champ magnétique de fréquence f_2 et l'amplification sélective de la fréquence modulée, de sorte que toute distorsion entraînerait une erreur.

Nous avons pu réguler un courant de 1 milliampère à ± 1 % dans une charge variant de 0 à 6 000 ohms en utilisant les éléments suivants : T transistor OC 16 de la S. A. La Radiotechnique, Th, thermistance 3 004 F du Laboratoire Central des Télécommunications, P = 14 volts, R_1 = 17 500 ohms, R_2 = 9 600 ohms, R_3 = 30 ohms, R_4 = 200 ohms, C dépend de la fréquence du courant régulé. La plage de régulation peut être déplacée en modifiant la résistance R_1. Ainsi, avec R_1 = 13 500 ohms, le courant reste égal à 1 milliampère à 4 % près lorsque la charge varie entre 6 000 et 15 000 ohms.

Lettre reçue le 8 décembre 1959.

RÉFÉRENCES

[1] Suchet (J.), Les Varistances, Chiron, Paris, 1955.
[2] Brevet français PV. 814.007.

NOTE COMPLÉMENTAIRE SUR LES CHAMBRES A SCINTILLATIONS

par J. Duflo,

Laboratoire de Physique Atomique et Moléculaire, Collège de France

J'ai étudié dans un précédent article [1] les possibilités de réaliser une chambre à scintillations, avec des filaments d'iodure de césium refroidis, et un seul amplificateur de brillance, la caméra électronique Lallemand-Duchesne. J'ai conclu que, dans ce cas, l'utilisation d'une optique de grandissement plus petit que 1 est le meilleur moyen de transmettre la lumière du scintillateur à la caméra, mais j'ai montré aussi les limitations liées à ce procédé.

Il nous est apparu, à B. Agrinier, du Centre d'Études Nucléaires de Saclay, et à moi-même, qu'il était possible d'amplifier la lumière issue du scintillateur, avant qu'elle atteigne la caméra, à l'aide d'un amplificateur de brillance Thomson (Th 9450), tout en conservant la résolution de la caméra électronique. En effet la résolution terminale N_t d'un instrument, et sa résolution à l'entrée N_e sont liées par la formule $GN_t = N_e$, G étant le grandissement total de l'instrument.

Dans notre cas N_e, la résolution à l'entrée du tube est 40 à 80 lignes/cm

$$G = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \approx \frac{1}{50}.$$

Donc N_t = 2 000 à 4 000 lignes/cm. Or la caméra électronique seule a une résolution d'environ 1 000 lignes. Nous voyons donc que cette résolution n'est pas diminuée par l'utilisation de l'amplificateur Thomson. D'autre part ce dispositif présente les avantages suivants :

1) Le nombre de traces d'électrons formant l'image d'un filament doit être environ 12 fois supérieur a celui évalué pour la caméra électronique associée à une optique très ouverte de grandissement 1/5. Ce chiffre à été calculé en prenant pour les optiques transmettant la lumière du scintillateur à l'amplificateur Thomson, et de celui-ci à la caméra électronique, un rendement global de 1 %, ce qui peut être obtenu avec des optiques type Angénieux F : 0,95.

2) Le gain de luminance peut permettre l'utilisation de scintillateurs moins lumineux, mais plus intéressants dans certaines expériences de physique nucléaire (plastiques scintillants).

3) Enfin il semble possible de photographier des trajectoires 2 à 4 fois plus longues (20 à 40 cm) dans un scintillateur de plus grandes dimensions, à l'aide d'une optique formant une image réduite 2 à 4 fois sur la photocathode de l'amplificateur Thomson, ceci sans diminution importante de la résolution globale.

Lettre reçue le 25 février 1960.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Remarques sur la réalisation de la chambre à scintillation par J. Duflo, *J. Physique Rad.*, 1960, **21**, 65 A.

SPECTROMÈTRE DE MASSE A LENTILLES QUADRUPOLAIRES EXCITÉES EN HAUTE FRÉQUENCE

Par Maurice Gaudaire,

Laboratoire d'Électronique et de Radioélectricité de la Faculté des Sciences, Fontenay-aux-Roses.

Le spectromètre étudié appartient au type décrit par W. Paül [1] ; il s'agit de lentilles électriques quadrupolaires, reliées deux à deux, parallèles à un axe Oz, auxquelles est appliqué un potentiel variable dans le temps, de la forme : $\Phi = \pm (U + V \cos \omega t)$. Les équations du mouvement d'un ion (e, m) pénétrant dans les lentilles peuvent s'écrire :

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} - (a + 2q \cos 2\xi)\, x = 0$$

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + (a + 2q \cos 2\xi)\, y = 0 \text{ et } \frac{d^2 z}{d\xi^2} = 0$$

avec

$$q = \frac{4eV}{mr_0^2\, \omega^2}, \quad a = \frac{8eU}{mr_0^2\, \omega^2}, \quad \xi = \frac{\omega t}{2}.$$

Ox et Oy définissent le plan perpendiculaire à l'axe et r_0 représente le rayon de gorge des lentilles. La résolution de ce système se ramène à celle de l'équation de Mathieu ; les courbes caractéristiques $a = f(q)$ [2] permettent de déterminer les conditions de stabilité de la trajectoire d'un ion suivant les axes Ox et Oy ; on met ainsi en évidence plusieurs domaines de fonctionnement possible du spectromètre. Pour des ions de masses différentes, les points de fonctionnement appar-

tiennent à la droite $a/q = 2U/V$; ce rapport est indépendant de la masse et, en choisissant judicieusement les paramètres a et q, on peut filtrer une seule masse m, les autres particules ayant des points de fonctionnement (a, q) appartenant à des zones instables. Par variation de la tension H. F. V, et par conséquent de U, on peut alors former le spectre des masses des particules injectées dans les lentilles quadrupolaires.

I. **Description de l'appareil utilisé.** — Les lentilles (4 tiges cylindriques de laiton chromé, de 10 mm de diamètre, 50 cm de long, tangentes à un cercle de diamètre $2r_0 = 16$ mm) ont une capacité équivalente de 60 pF. Pour mettre en évidence la présence de masses jusqu'à $A = 20$, la détermination des différents paramètres conduit à choisir une fréquence $\omega/2\pi$ de 5 MHz et une tension H. F. maximum de 4 700 volts crête à crête aux bornes des lentilles ; la puissance H. F. alors mise en jeu est de l'ordre de 150 watts.

La source tension H. F. se compose d'un oscillateur du type E. C. O., à quartz thermostaté, alimenté par une haute tension stabilisée : les dérives de fréquence sont ainsi réduites au minimum. Après un étage séparateur se trouve l'étage final symétrique (2 lampes PE 1/100 en classe C_2) qui, à travers une boucle de couplage adaptatrice, attaque les lentilles ; celles-ci, associées à une inductance L, forment un circuit oscillant accordé à 5 MHz. Un système détecteur fournit la tension U, proportionnelle à l'amplitude H. F. Le couplage de la bobine de détection avec L est réglable mécaniquement pour faire varier le rapport U/V.

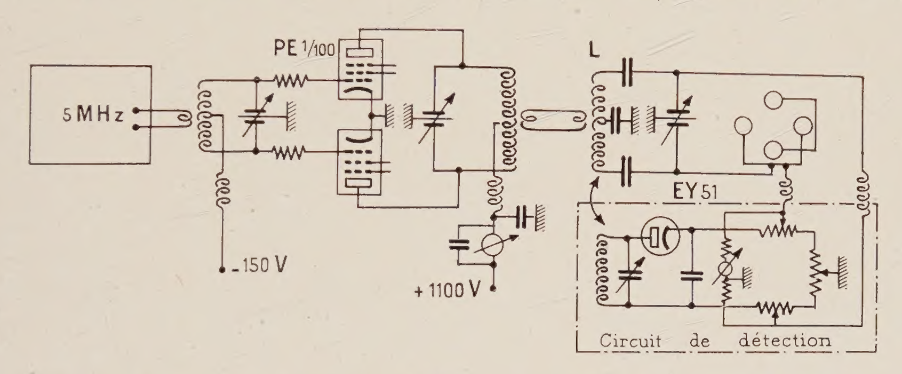


Fig. 1. — Schéma d'ensemble.

Afin d'inscrire sur un enregistreur le spectre $I = f(A)$ il faut obtenir une variation linéaire dans le temps de la tension H. F., puisque V est proportionnel à la masse.

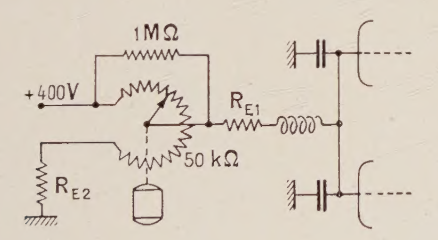


Fig. 2. — Polarisation de la grille-écran.

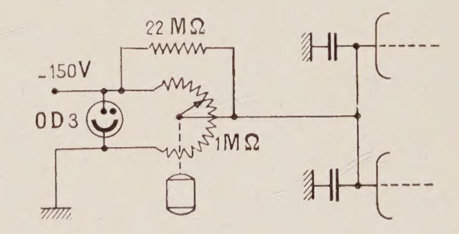


Fig. 3. — Polarisation de la grille-suppresseuse.

Pour les masses inférieures à $A = 9$, on agit sur la tension de la grille-écran (*fig.* 2) ; le potentiomètre de 50 kΩ est entraîné par un moteur assez lent (1/2 tour par minute) pour éliminer l'influence de l'inertie de la plume enregistreuse ; la résistance R_{E1} (2 500 ohms) compense le défaut de linéarité de la courbe $V = f(V_{g2})$; R_{E2} permet d'ajuster la zone des nombres de masse balayée. Pour $9 < A < 19$, c'est le potentiel de la grille-suppresseuse qui varie avec le potentiomètre de 1 MΩ (*fig.* 3) ; on le choisit logarithmique pour compenser la courbure de la caractéristique $V = f(V_{g3})$.

II. **Étude de différents spectres.** — *Séparation des isotopes du lithium.* — La source ionique est constituée d'une sphère d'alumino-silicate de lithium, portée par un filament de tungstène chauffé autour de 1 200°. La tension d'extraction est de l'ordre de 1 500 volts. Le pouvoir séparateur est amélioré en ralentissant les ions, leur temps de présence dans le champ H. F. étant plus long ; un espace de freinage est disposé entre l'électrode d'extraction et le diaphragme d'entrée du système quadrupolaire. Avec les éléments utilisés, pour un courant ionique de 17 μA et une accélération de 1 460 volts, après freinage à 250 volts, on recueille encore 10 μA d'ions $^6Li^+$ et $^7Li^+$ (diaphragme de 5 mm). La focalisation est réglée par une lentille à tension variable et par le wehnelt. Un cylindre de Faraday, à la sortie de la lentille, connecté à un amplificateur à courant continu, permet d'enregistrer les variations du courant ionique. Le spectre représenté (*fig.* 4) correspond à un diaphragme de 2 mm et une valeur de $U/V = 0{,}161$; le courant d'ions $^6Li^+$ obtenu est de 0,1 μA.

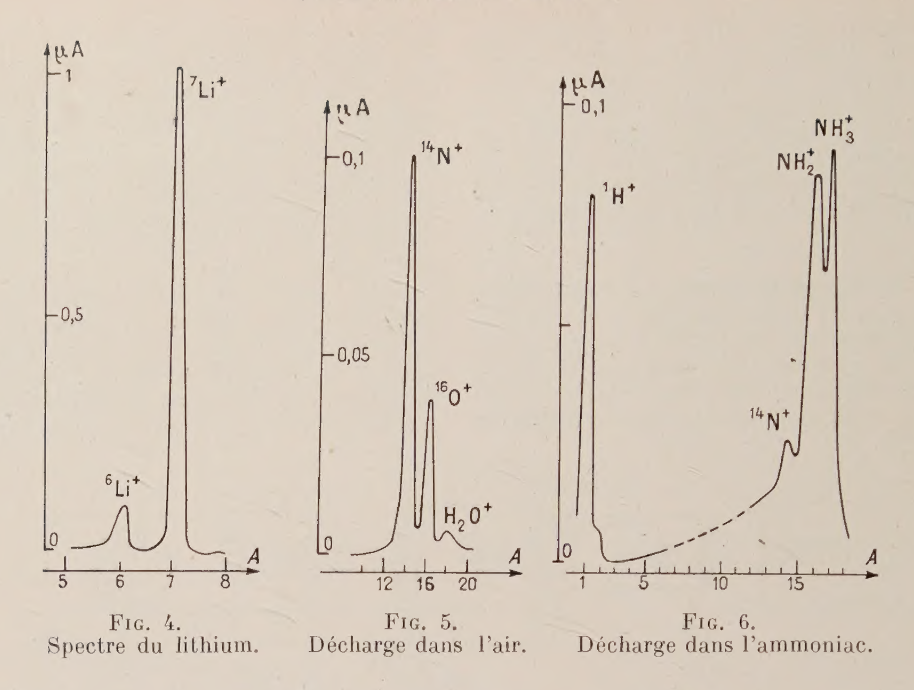


Fig. 4. Spectre du lithium.

Fig. 5. Décharge dans l'air.

Fig. 6. Décharge dans l'ammoniac.

Analyse des ions issus d'une décharge gazeuse. — Le système optique est le même ; la décharge se produit dans un canon à ions, entre deux électrodes distantes de 2 mm. La différence de potentiel nécessaire à la décharge accélère en même temps les ions.

Dans le cas de l'air, le spectre obtenu (*fig.* 5) semble correspondre aux réactions :

$$N_2 \rightarrow N^+ + N^* \quad (N^* \downarrow N^+) \qquad O_2 \rightarrow O^+ + O^* \quad (O^* \downarrow O^+) \qquad H_2O \rightarrow (H_2O)^+$$

Pour l'ammoniac (*fig.* 6), on aurait :

$$NH_3 \begin{cases} \nearrow NH_3^+ \\ \searrow NH_2 + H \\ \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ \quad NH_2^+ \quad H^+ \end{cases}$$

La décharge serait assez intense pour détruire la molécule d'ammoniac, d'où production des ions N^+.

III. **Recherche d'autres domaines de fonctionnement.** — Dans le réseau des courbes caractéristiques de l'équation de Mathieu, il existe un domaine supérieur de stabilité autour de $q = 3$ et $a = 2{,}75$. La décharge est faite dans l'hydrogène ; pour les ions H^+, ces valeurs de a et q correspondent à $V = 341$ volts efficaces et $U = 225$ volts ; ces tensions sont doublées pour les ions H_2^+. L'existence de trajectoires stables dans ce domaine n'a pu être mise en évidence ; ce fait peut s'expliquer par la valeur maximum de la composante latérale de la vitesse initiale des ions, afin que l'amplitude des trajectoires stables soit inférieure au rayon r_0 des lentilles. Une évaluation approximative conduit en effet, pour les ions H^+, à une vitesse transversale telle que l'angle d'entrée soit inférieur à quelques 10^{-4} radian. Le nombre des particules répondant à cette condition est trop faible devant celui des ions instables résiduels et ne peut être mis en évidence. L'accroissement du courant émis, la réduction du diaphragme d'entrée et l'allongement des lentilles quadrupolaires permettront, peut-être, d'obtenir des résultats positifs ; mais, de toute manière, le fonctionnement normal de l'appareil se situera toujours dans le premier domaine, où les conditions d'injection sont moins critiques.

Lettre reçue le 29 février 1960.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Paul (W.), *Zeitschrift für Physik*, 1958, Bd **152**, S. 143-182.

[2] Campbell (R.), Théorie générale de l'équation de Mathieu, p. 43.

Le Gérant : Maurice Blondin. — Dépôt légal : 1er trim. 1960. — Imp. Taffin-Lefort, à Lille (France).